Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 0454

Calculer le déterminant suivant et donner le résultat sous forme factorisée :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 0454

- Si $a = 1$, la première et la dernière colonne sont identiques, donc le déterminant est non nul.
- Si $a \neq 1$, on retranche la quatrième colonne à toutes les autres pour obtenir :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

et en additionnant à la quatrième ligne : la première, la troisième, la cinquième et la septième, toutes multipliées par $\dfrac{-1}{a-1}$; puis la deuxième et la sixième :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{2(a-3)}{a-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

Ce qui donne ensuite en développant suivant la quatrième ligne :

$$\Delta = A(a-1)^3(a-3)$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4199

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour $\theta \neq 0 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\Delta_n(\theta) = \det\left(A + (2\cos(\theta)\mathrm{I}_n)\right)$.

1. Calculer $\Delta_1(\theta)$ et $\Delta_2(\theta)$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, on a : $\quad \Delta_n(\theta) = 2\cos(\theta)\Delta_{n-1}(\theta) - \Delta_{n-2}(\theta)$.
3. Montrer par récurrence que : $\quad \forall n \geq 1, \quad \Delta_n(\theta) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.
4. Donner alors les valeurs propres de A.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 4199

1. **Calcul de $\Delta_1(\theta)$:** par définition de A, il vient que : $\begin{array}{rcl} \Delta_1(\theta) & = & \left|2\cos(\theta)\right| \\ & = & 2\cos(\theta) \end{array}$

   Calcul de $\Delta_2(\theta)$: par définition de A, il vient que : $\begin{array}{rcl} \Delta_2(\theta) & = & \begin{vmatrix} 2\cos(\theta) & 1 \\ 1 & 2\cos(\theta) \end{vmatrix} \\ & = & 4\cos^2(\theta) - 1 \end{array}$

2. Soit $n \geq 3$. En posant $\alpha = 2\cos(\theta)$, un calcul direct donne que :

$$\begin{array}{rcl}
\Delta_n(\theta) & = & \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & \alpha \end{vmatrix}_{n\times n} \\
& \underset{\text{Dév. p/r } C_1}{=} & \alpha \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \alpha & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & \alpha \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} + (-1)^{1+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & \alpha \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} \\
& \underset{\text{Dév. p/r } L_1}{=} & \alpha\Delta_{n-1}(\theta) - (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)} \\
& = & \alpha\Delta_{n-1}(\theta) - \Delta_{n-2}(\theta)
\end{array}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{P}(n)$: ´ $\Delta_n(\theta) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$ ˝.

   Montrons par récurrence double sur l'entier n que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

   Initialisation : on sait que $\Delta_1(\theta) = 2\cos(\theta)$.

   Or $\dfrac{\sin((1+1)\theta)}{\sin(\theta)} = \dfrac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta)}$. Comme $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$, on en déduit que $\Delta_1(\theta) = \dfrac{\sin((1+1)\theta)}{\sin(\theta)}$ ce qui est bien $\mathcal{P}(1)$.

   De même, $\Delta_2(\theta) = 4\cos^2(\theta) - 1$.

   Or : $$\begin{array}{rcl} \dfrac{\sin((2+1)\theta)}{\sin(\theta)} & = & \dfrac{\sin(3\theta)}{\sin(\theta)} \\ & = & \dfrac{\sin(2\theta) + \theta)}{\sin(\theta)} \\ & = & \dfrac{\sin(2\theta)\cos(\theta) + \cos(2\theta)\sin(\theta)}{\sin(\theta)} \\ & = & \dfrac{2\sin(\theta)\cos^2(\theta) + \cos(2\theta)\sin(\theta)}{\sin(\theta)} \\ & = & 2\cos^2(\theta) + \cos(2\theta) \\ & = & 2\cos^2(\theta) + 2\cos^2(\theta) - 1 \\ & = & 4\cos^{(}\theta) - 1 \end{array}$$

   Ce qui est bien $\mathcal{P}(2)$.

Hérédité : Soit $n \geq 3$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n-2)$ et montrons, sous cette hyptohèse que l'on a $\mathcal{P}(n)$.

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\Delta_n(\theta) &= 2\cos(\theta)\Delta_{n-1}(\theta) - \Delta_{n-2}(\theta) \\
&\underset{\text{Hyp.Rec.}}{=} 2\cos(\theta)\frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} - \frac{\sin((n-1)\theta)}{\sin(\theta)} \\
&= \frac{1}{\sin(\theta)}\left(2\cos(\theta)\sin(n\theta) - \sin((n-1)\theta)\right) \\
&= \frac{1}{\sin(\theta)}\left(\sin(n\theta+\theta) + \sin(n\theta-\theta) - \sin((n-1)\theta)\right) \\
&= \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}
\end{aligned}$$

ce qui est bien $\mathcal{P}(n)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie aux rangs 1 et 2, et héréditaire, d'après le principe de récurrence double, la proposition $\mathbb{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

4. A possède au plus n valeurs propres puisqu'appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Les valeurs propres λ sont par ailleurs les racines du polynôme caractéristique de A qui est $\det(\lambda \mathrm{I}_n - A) = (-1)^n \det(A - \lambda \mathrm{I}_n)$.

En écrivant $\Delta_n(\theta) = \det\left(A - (-2\cos(\theta))\,\mathrm{I}_n\right)$, toutes les valeurs de θ qui annulent $\Delta_n(\theta)$ donnent donc une valeur propre de A.

On ne peut avoir $\theta = 0$. Pour tout $1 \leq k \leq n$, $\Delta_n\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right) = 0$.

Ainsi, le spectre de A est : $\mathrm{sp}(A) = \left\{-2\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right),\, 1 \leq k \leq n\right\}$.