Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs...La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 1365

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

1. Déterminer le noyau de A.

2. Quel est le rang de la matrice $A - \mathrm{I}_4$?

3. On donne $\chi_A(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2$.
La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 1365

1. Par définition : $\left(X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(A) \right) \Leftrightarrow (\, AX = (0)\,)$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} (x_1, \ldots, x_4) \text{ est solution du système} \\ \text{de représentation matricielle } (A|0) \end{array} \right)$

Un échelonnement en ligne du système $(A|0)$ donne :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 1L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 1L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - 1L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 1L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On en déduit donc que : $(\, X \in \mathrm{Ker}\,(A)\,) \Leftrightarrow \left(X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right)$

2. Un échelonnement en ligne de la matrice $A - \mathrm{I}_4$ donne :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - 1L_1}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2}{\sim_L}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - 1L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que le rang de la matrice $A - \mathrm{I}_4$ est 3.

3. On a :
$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 \\ &= \lambda^2\left(\lambda^2 - 2\lambda + 1\right) \\ &= \lambda^2\left(\lambda - 1\right)^2 \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{sp}(A) = \{0, 1\}$.

D'après la première question, on en déduit que $\dim(E_0(A)) = 1$ et d'après la deuxième question, d'après le théorème du rang que $\dim(E_1(A)) = 1$.
Par suite, $\dim(E_1(A)) + \dim(E_0(A)) = 2 \neq 4 = \dim(\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}))$.
Par théorème, on en déduit que A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 1365

EX. 2 | Réf. 0534

Dans cet exercice, on suppose que E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 4 dont on note $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_4}\right)$ une base.

Soit alors $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer $u\left(\overrightarrow{v_1}\right)$ où $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} - 2\overrightarrow{e_3} - 3\overrightarrow{e_4}$.

2. Calculer $u\left(\overrightarrow{v_2}\right)$ où $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2} - 2\overrightarrow{e_3} + 3\overrightarrow{e_4}$.

3. Montrer que 3 et -3 sont valeurs propres de u.

4. L'endomorphisme u est-il diagonalisable dans $\mathbb{R}$, et si oui, donner une base diagonalisante et la matrice de u dans cette base ?

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 0534

1. On sait que :

$$\begin{aligned} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}\left(u\left(\overrightarrow{v_1}\right)\right) &= \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \times \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{v_1}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} \\ &= 2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et ainsi, on en déduit que $u\left(\overrightarrow{v_1}\right) = 2\overrightarrow{v_1}$.

2. On sait que :

$$\begin{aligned} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}\left(u\left(\overrightarrow{v_2}\right)\right) &= \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \times \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{v_2}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \\ &= -2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et ainsi, on en déduit que $u\left(\overrightarrow{v_2}\right) = -2\overrightarrow{v_2}$.

3. On sait que : $(\lambda \in \operatorname{Sp}(u)) \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda \in \operatorname{sp}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)))$
et que : $(\lambda \in \operatorname{Sp}(A)) \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda \mathrm{I}_4 \notin \mathrm{GL}_4(\mathbb{R}),)$

Un échelonnement en lignes de la matrice $mathrmMat_{\mathcal{B}}(u) - 3\mathrm{I}_4$ donne :

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{2}{3}L_1}{\sim_L} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1}{2}L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette dernière étant donc une matrice carrée de taille 4×4 et seulement de rang 3, elle est donc par théorème, non inversible.

De même, un échelonnement en lignes de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) + 3\mathrm{I}_4$ donne :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{3}L_1}{\sim_L} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{2}L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et par le même argument que précédemment, cette matrice n'est pas inversible.

Ainsi, on en déduit que $\{-3, 3\} \subset \mathrm{sp}(u)$.

4. Diagonalisabilité de u : La première question donne que $2 \in \mathrm{sp}(u)$ et la deuxième que $-2 \in \mathrm{sp}(u)$.

Ainsi, on a $\{-3, -2, 2, 3\} \subset \mathrm{sp}(u)$ et comme $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim(E) = 4$, u ne peut avoir qu'au plus 4 valeurs propres distincts, et on en déduit donc que $\mathrm{sp}(u) = \{-3, -2, 2, 3\}$.

u est donc un endomorphisme d'un espace de dimension 4 sur $\mathbb{R}$ qui possède 4 valeurs propres distinctes. Par théorème u est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Base diagonalisante : d'après les deux premières questions, on sait que $E_2(u) = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{v_1}\right)$ et $E_{-2}(u) = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{v_2}\right)$.

En poursuivant l'échelonnement en ligne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) - 3\mathrm{I}_4$, il vient :

$$\mathbb{M}\eth\approx_{\mathcal{B}}(u) + 3\mathrm{I}_4 \sim_L \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftarrow -\frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{3}{7}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{6}L_3}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{3}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{7}L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{3}L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et qui donnera alors que : $\mathrm{Ker}\ (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) - 3\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1, \\ 3 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix}\right)$, c'est à dire que $E_3(u) = \mathrm{Vect}\ ((1, 3, -7, 7))$

En poursuivant l'échelonnement en ligne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) + 3\mathrm{I}_4$, il vient :

$$\mathbb{M}\eth\approx_{\mathcal{B}}(u) + 3\mathrm{I}_4 \sim_L \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{3}{7}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{6}L_3}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{3}{7}L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{3}L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et qui donnera alors que : $\text{Ker}\left(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)+3\text{I}_4\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-3\\-7\\7\end{pmatrix}\right)$, c'est à dire que $E_3(u) = \text{Vect}\left((1,-3,-7,7)\right)$.
La famille $\mathcal{C} = ((1,2,-2,-3),(1,-2,-2,3),(1,3,-7,-7),(1,-3,-7,7))$ est alors une base E de vecteurs propres de u. La matrice de u dans $\mathcal{C}$ est alors : $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$.

Préparation à l'oral

EX. 3 | Réf. 1364

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée qui vérifie $A^3+3A^2-A-3\text{I}_n = 0$. Montrer que si λ est une valeur propre de A, alors $\lambda \in \{-3,-1,1\}$.
2. La matrice $M = \begin{pmatrix}2&-2&1\\2&-3&2\\-1&2&0\end{pmatrix}$ est telle que $M^3+3M^2-M-3\text{I}_3 = (0)$. Est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?

EX. 4 | Éléments de correction | Réf. 1364

1. Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et $X \in E\lambda(A)$ avec $X \neq (0)$.
On a donc $AX = \lambda X$, puis $A^2X = \lambda^2 X$ et $A^3X = \lambda^3 X$.
Ainsi, il vient : $$\begin{aligned}\left(A^3-3A^2-A-3\text{I}_n\right)X &= A^3X-3A^2X-AX-3X\\ &= \lambda^3A-3\lambda^2X-\lambda X-3X\\ &= \left(\lambda^3-3\lambda^2-\lambda-3\right)X\end{aligned}$$
Or $\left(A^3-3A^2-A-3\text{I}_n\right)X = 0$ par hypothèse, et comme $X \neq (0)$, nécessairement $\lambda^3-3\lambda^2-\lambda-3 = 0$.
On peut montrer que : $\lambda^3-3\lambda^2-\lambda-3 = (\lambda+3)(\lambda-1)(\lambda+1)$.
Par suite, il vient que $\lambda \in \{-3,-1,1\}$.
2. D'après la question précédente, $\text{sp}(M) \subset \{-3,1,-1\}$. Or $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, donc possède au plus trois valeurs propres qui ne peuvent être que -3, 1 et -1.
Un échelonnement en ligne de la matrice $M+\text{I}_3$ donne :
$$\begin{pmatrix}3&-2&1\\2&-2&2\\-1&2&1\end{pmatrix} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-\frac{2}{3}L_1\\ L_3\leftarrow L_3+\frac{1}{3}L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix}3&-2&1\\0&-\frac{2}{3}&\frac{4}{3}\\0&\frac{4}{3}&\frac{4}{3}\end{pmatrix} \underset{L_3\leftarrow L_3+2L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix}3&-2&1\\0&-\frac{2}{3}&\frac{4}{3}\\0&0&4\end{pmatrix}$$
et par suite, la matrice $M+\text{I}_3$ est inversible puisque de rang 3, donc par théorème -1 n'est pas valeur propre.
Un échelonnement en ligne de la matrice $M-\text{I}_3$ donne :
$$\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&-4&2\\-1&2&-1\end{pmatrix} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3+1L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix}1&-2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$
et par suite, la matrice $M-\text{I}_3$ n'est pas inversible car son rang est différent de 3, donc 1 est bien valeur propre. On en déduit par ailleurs que $\dim\left(\text{Ker}\,(M-\text{I}_3)\right) = 2$ c'est à dire que $\dim\left(E_1(M)\right) = 2$.
Un échelonnement de la matrice $M-3\text{I}_3$ donne :
$$\begin{pmatrix}-1&-2&1\\2&0&2\\-1&2&-3\end{pmatrix} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-1L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix}-1&-2&1\\0&-4&4\\0&4&-4\end{pmatrix}$$
$$\underset{L_3\leftarrow L_3+1L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix}-1&-2&1\\0&-4&4\\0&0&0\end{pmatrix}$$
et par suite, la matrice $M-\text{I}_3$ n'est pas inversible car son rang est différent de 3, donc 3 est bien valeur propre. On en déduit par ailleurs que $\dim\left(\text{Ker}\,(M-3\text{I}_3)\right) = 1$ c'est à dire que $\dim\left(E_3(M)\right) = 1$.
Finalement, $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ avec $\text{sp}(M) = \{1,3\}$ et $\dim\left(E_1(M)\right)+\dim\left(E_3(M)\right) = 3$. Par théorème, M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

EX. 5 | Éléments de correction | Réf. 1364

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 4 | Réf. 0539

On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P(1-X) \end{array} \right.$$

et soit $\mathcal{F} = (P_0, \ldots, P_3)$ la famille de polynômes où : $\forall k \in [\![0;3]\!]\,,\ P_k = \left(X - \dfrac{1}{2}\right)^k$.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![0;3]\!]$, P_k est un vecteur propre de φ.
2. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

EX. 6 | Éléments de correction | Réf. 0539

1. Soit $k \in [\![0;3]\!]$. On a donc :
$$\begin{aligned} \varphi(P_k) &= \left((1-X) - \frac{1}{2}\right)^k \\ &= \left(\frac{1}{2} - X\right)^k \\ &= (-1)^k P_k \end{aligned}$$
Ainsi, P_k est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre $(-1)^k$.
2. La famille $\mathcal{F}$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés. Par théorème elle est libre. Or il s'agit d'une famille libre de 4 vecteurs dans $\mathbb{R}_3[X]$ qui est un espace de dimension 4. Donc par théorème $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. $\mathcal{F}$ est donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$ constituée de vecteurs propres de φ. Donc définition φ est diagonalisable.

EX. 7 | Éléments de correction | Réf. 0539

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 5 | Réf. 1375

Déterminer les coefficients de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b' & c' \\ 1 & b'' & c'' \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ sachant que A admet pour vecteurs propres les trois matrices colonnes V_1, V_2 et V_3 où :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

EX. 8 | Éléments de correction | Réf. 1375