À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs... La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

Exercice| [4839] | 1

On considère la fonction f donnée par $f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \lambda^2 t \mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases} \end{array} \right.$

(1). Montrer que f est une densité de probabilité.
Dans tout ce qui suit, X désigne alors une variable aléatoire de densité f.

(2). Déterminer la fonction de répartition F de X.

(3). Montrer que X admet une espérance et une variance et que l'on a $\mathbb{E}(X) = \dfrac{2}{\lambda}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{2}{\lambda^2}$.

Éléments de correction

(1). Caractère continu de f sauf en un nombre fini de points : les fonctions $t \longmapsto 0$ et $t \longmapsto \lambda^2 t \mathrm{e}^{-\lambda t}$ sont continues sur respectivement $]-\infty; 0[$ et sur $[0; +\infty[$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 0.

Caractère positif de f : il est immédiat que : $\begin{cases} \forall t \in \,]-\infty; 0[\,, f(t) = 0 \geq 0 \\ \forall t \in [0; +\infty[\,, f(t) = \underbrace{\lambda^2}_{\geq 0} \times \underbrace{t}_{\geq 0} \times \underbrace{\mathrm{e}^{-\lambda t}}_{\geq 0} \geq 0 \end{cases}$

et par conséquent f est à valeurs positives.

Convergence et valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$: compte-tenu de l'expression de f, il s'agit donc d'établir la convergence et de déterminer la valeur de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, qui n'est impropre qu'en sa borne $+\infty$ puisque f est continue sur $[0; +\infty[$.
Soit alors $A \geq 0$. Une intégration par parties en posant :

$$\begin{array}{lcl} u(t) = \lambda^2 t & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(t) = \lambda^2 \\ v(t) = -\dfrac{1}{\lambda} \mathrm{e}^{-\lambda t} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} \end{array}$$

où u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; A]$, donne que :

$$\begin{aligned} \int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t &= \left[-\lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^A + \int_0^A \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^A + \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^A \\ &= \underbrace{-\lambda A \mathrm{e}^{-\lambda A}}_{\underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 0} + 0 - \underbrace{\mathrm{e}^{-\lambda A}}_{\underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 0} + 1 \\ &\underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

Par conséquent l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Finalement on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Ainsi, f est bien une densité de probabilité.

(2). Par théorème, on sait que : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Compte-tenu de l'expression de f, on en déduit donc ici que :

$$\begin{aligned} F(x) &= \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \tilde{0}(t)\,\mathrm{d}t & \text{si} \quad x<0 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \tilde{0}(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} \lambda^2 t\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t & \text{si} \quad 0 \leq x \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ \displaystyle\int_{0}^{x} \lambda^2 t\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t & \text{si} \quad 0 \leq x \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} - \lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si} \quad 0 \leq x \end{cases} \end{aligned}$$

(3). Espérance de X : par définition X admet une espérance lorsque $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, ce qui compte-tenu de l'expression de f revient à s'intéresser à la convergence et à la valeur de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \lambda^2 t^2\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.

Par croissance comparée on a que $t^2 \times \lambda^2 t\mathrm{e}^{-\lambda t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc que $\lambda^2 t\mathrm{e}^{-\lambda t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Puisque $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente, par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \lambda^2 t\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ est convergente, et par suite $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \lambda^2 t\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ est convergente, ce qui assure l'existence de $\mathbb{E}(X)$.

Soit $A \geq 0$. Un intégration par parties en posant :

$$\begin{aligned} u(t) &= \lambda^2 t^2 & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & \quad u'(t) = 2\lambda^2 t \\ v(t) &= -\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda t} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & \quad v'(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} \end{aligned}$$

où u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;A]$ donne :

$$\begin{aligned} \int_{0}^{A} \lambda^2 t^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t &= \left[-\lambda^2 t^2\mathrm{e}^{-2t}\right]_0^A + \frac{2}{\lambda}\int_{0}^{A} \lambda^2 t\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \\ &= \underbrace{-\lambda^2 A^2\mathrm{e}^{-\lambda A}}_{\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0} + \frac{2}{\lambda}\underbrace{\left(-\lambda A\mathrm{e}^{-\lambda A} - \mathrm{e}^{-\lambda A} + 1\right)}_{\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \\ &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{6}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Par suite X admet une variance qui vaut :
$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \frac{6}{\lambda^2} - \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 \\ &= \frac{6}{\lambda^2} - \frac{4}{\lambda^2} \\ &= \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Variance de X : Par définition, si X^2 admet une espérance, alors X admet une variance qui vaut $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$ d'après la formule de Huygens.

Or d'après le théorème du transfert X^2 admet une espérance si, et seulement si, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, ce qui compte-tenu de l'expression de f revient à établir la convergence de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^f(t)\,\mathrm{d}t$.

Par croissance comparée on a que $t^2 \times \lambda^2 t^2\mathrm{e}^{-\lambda t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc que $\lambda^2 t^2\mathrm{e}^{-\lambda t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Puisque $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente, par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \lambda^2 t^2\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ est convergente, et par suite $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \lambda^2 t^2\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ est convergente, ce qui assure l'existence de $\mathbb{V}(X)$.

Soit $A \geq 0$. Un intégration par parties en posant :

$$\begin{array}{rcl} u(t) = \lambda^2 t^3 & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(t) = 3\lambda^2 t^2 \\ v(t) = -\dfrac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda t} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} \end{array}$$

où u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; A]$ donne :

$$\begin{aligned} \int_0^A \lambda^2 t^2 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t &= \left[-\lambda^2 t^3 \mathrm{e}^{-2t}\right]_0^A + \frac{3}{\lambda}\int_0^A \lambda^2 t^2 \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \\ &= \underbrace{-\lambda^2 A^3 \mathrm{e}^{-2A}}_{\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0} + \frac{3}{\lambda}\underbrace{\left(-\lambda^2 A \mathrm{e}^{-\lambda A} + \frac{2}{\lambda}\left(-\lambda A^2 \mathrm{e}^{-\lambda A} - \mathrm{e}^{-\lambda A} + 1\right)\right)}_{\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\lambda}} \end{aligned}$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [4838] | 2| Temps d'attente

On ouvre un guichet au temps 0 où des clients se présentent à ce guichet aux instants aléatoires T_1, T_2,. . . .
On suppose que les variables aléatoires E_1, E_2,. . . définies sur un espace probabilisé par

$$\left\{\begin{array}{rcl} E_1 &=& T_1 \\ E_2 &=& T_2 - T_1 \\ E_3 &=& T_3 - T_2 \\ & \vdots & \end{array}\right.$$

sont mutuellement indépendantes et suivent la même loi exponentielle de même espérance $\lambda > 0$.
On note alors X le nombre de clients arrivant dans l'intervalle de temps $[0; 1]$.

On admettra que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n donnée par $f_n(x) = \left\{\begin{array}{ccc} \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}\lambda^n \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} & \end{array}\right.$ est une densité de probabilité.

(1). Exprimer T_n en fonction de $E_1, \ldots, E_n$, et on admettra pour la suite que T_n est une variable aléatoire de densité f_n.

(2). Calculer $\mathbb{P}([X = 0])$.

(3). Montrer que : $\forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}([X = n]) = \mathbb{P}([T_{n+1} > 1]) - \mathbb{P}([T_n > 1])$

(4). En déduire la loi de X.

(5). On pose, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $E_i = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(U_i)$, où U_1, U_1, sont des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes de même loi uniforme sur $[0; 1]$.
On considère la variable aléatoire Y donnée par :

$$Y = \left\{\begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & U_1 < \mathrm{e}^{-\lambda} \\ \min\left\{n \in \mathbb{N}^*, U_1 U_2 \ldots U_{n+1} < \mathrm{e}^{-\lambda}\right\} & \text{sinon} & \end{array}\right.$$

Montrer que les variables aléatoires X et Y ont la même loi.

Éléments de correction

(1). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a par différences successives $T_n = E_1 + \ldots + E_n$.

(2). On a : $\begin{array}{rcl} [X = 0] &=& [T_1 > 0] \\ &=& [E_1 > 1] \end{array}$

Donc : $\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(X = 0) &=& 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right) . \\ &=& \mathrm{e}^{-\lambda} \end{array}$

(3). Soit $n \geq 1$. On a $[X = n] = [T_n \leq 1 < T_{n+1}]$.

Or on a : $\begin{array}{rcl}[1<T_{n+1}] & = & ([T_n\leq 1]\cup[T_n>1])\cap[1<T_{n+1}]\\ & = & ([T_n\leq 1]\cap[1<T_{n+1}])\cup([T_n>1]\cap[1<T_{n+1}])\end{array}$

et ces deux derniers événements étant incompatibles :

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}([1<T_{n+1}]) & = & \mathbb{P}([T_1\leq 1]\cap[1<T_{n+1}])+\mathbb{P}([T_n>1]\cap[1<T_{n+1}])\\ & = & \mathbb{P}([T_n\leq 1]\cap[1<T_{n+1}])+\mathbb{P}(T_n>1)\\ & = & \mathbb{P}([X=n])+\mathbb{P}([T_n>1])\end{array}$$

d'où, pour tout $n\geq 1$, $\mathbb{P}([X=n])=\mathbb{P}([1<T_{n+1}])-\mathbb{P}([1<T_n])$.

(4). Ainsi : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X=n])=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\lambda^{n+1}\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x-\int_1^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\lambda^n\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$

Soit $A\geq 1$. En intégrant par parties la première intégrale en posant :

$$\begin{array}{rcl}u(x)=\dfrac{\lambda^{n+1}}{n!}x^n & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(x)=\dfrac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}x^{n-1}\\ v(x)=-\dfrac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(x)=\mathrm{e}^{-\lambda x}\end{array}$$

où u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[1;A]$, on a :

$$\begin{array}{rcl}\displaystyle\int_1^A\frac{x^n}{n!}\lambda^{n+1}\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x & = & \left[\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{-\lambda}\dfrac{x^n}{n!}\lambda^{n+1}\right]_1^A-\displaystyle\int_1^A\frac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{-\lambda}\times n\times\frac{x^{n-1}}{n!}\lambda^{n+1}\,\mathrm{d}x\\ & \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} & \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}+\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\lambda^n\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x\end{array}$$

Donc : $$\begin{array}{rcl}\underbrace{\displaystyle\int_1^A\frac{x^n}{n!}\lambda^{n+1}\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x}_{\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}\mathbb{P}([1<T_{n+1}])}-\underbrace{\displaystyle\int_1^A\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\lambda^n\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x}_{\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}\mathbb{P}([1<T_n])} & = & \left[-\dfrac{\lambda^n\mathrm{e}^{-\lambda x}}{n!}x^n\right]_1^A\\ & = & \underbrace{-\mathrm{e}^{-\lambda A}\dfrac{A^n}{n!}}_{\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}0}+\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}\end{array}$$

Les deux intégrales étant convergentes, par passage à la limite dans cette égalité, il vient que :

$$\mathbb{P}([1<T_{n+1}])-\mathbb{P}([1<T_n])=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

et par suite : $\mathbb{P}([X=n])=\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$.

Par conséquent, X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$ étant évident que $X(\Omega)=\mathbb{N}$.

et par suite $\mathbb{P}(X=n)=\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$ et l'on reconnaît une loi de Poisson de paramètre λ.

(5). On a : $$\begin{array}{rcl}[X=0] & = & [T_1>1]\\ & = & [E_1>1]\\ & = & \left[-\dfrac{1}{\lambda}\ln(U_1)>1\right]\\ & = & [U_1<\mathrm{e}^{-\lambda}]\\ & = & [Y=0]\end{array}$$

et on en déduit notamment que $\mathbb{P}([X=0])=\mathrm{e}^{-\lambda}$.

Par ailleurs, pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{array}{rcl}[X=n] & = & [E_1+E_2+\ldots+E_n\leq 1<E_1+\ldots+E_n+E_{n+1}]\\ & = & \left[-\dfrac{1}{\lambda}\ln(U_1)-\ldots-\dfrac{1}{\lambda}\ln(U_n)\leq 1<-\dfrac{1}{\lambda}\ln(U_1)-\dfrac{1}{\lambda}\ln(U_{n+1})\right]\\ & = & [U_1U_2\ldots U_n\geq\mathrm{e}^{-\lambda}>U_1U_2\ldots U_nU_{n+1}]\\ & = & [Y=n]\end{array}$$

et par suite, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X=n])=\mathbb{P}([Y=n])$.

Par conséquent, les variables aléatoires X et Y suivent donc la même loi.