À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs... La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

Exercice| [2324] | 1| Limite d'une somme

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$.

(1). Montrer que pour tout $n \geq 4$, on a : $u_n = 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}}$

(2). Soit $n \geq 4$. Montrer que pour tout $k \in [\![2; n-2]\!]$, $\binom{n}{k} \geq \frac{n(n-1)}{2}$.

(3). En déduire un encadrement de u_n et montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.

Éléments de correction

(1). Pour $n \geq 4$. On a :

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} \\ &= \frac{1}{\binom{n}{0}} + \frac{1}{\binom{n}{1}} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} + \frac{1}{\binom{n}{n-1}} + \frac{1}{\binom{n}{n}} \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{1} \\ &= 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \end{aligned}$$

(2). Soit $n \geq 4$ et $n \in [\![2; n-2]\!]$. Par définition $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)}{k!}$

Ainsi, $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{n-2}{k} \times s\underbrace{\frac{n-3}{k-1}}_{\geq 1} \times \ldots \times \underbrace{\frac{n-k+1}{3}}_{\geq 1} \geq \frac{n(n-1)}{2}$

(3). Il vient alors que pour tout $n \geq 4$ et $k \in [\![2; n-2]\!]$, $\frac{1}{\binom{n}{k}} \leq \frac{2}{n(n-1)}$.

Ainsi, $u_n = \underbrace{2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}}}_{\geq 0} \leq 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{2}{n(n-1)}$ ce qui donne $2 \leq u_n \leq 2 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n(n-1)} \times (n-2-2+1)$

soit $2 \leq u_n \leq 2 + \frac{2}{n} + (n-3)\frac{2}{n(n-1)}$.

Par ailleurs, puisque $\frac{2}{n} + (n-3)\frac{2}{n(n-1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il vient par le théorème d'encadrement que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [4354] | 2| Étude d'une suite récurrente

L'objet de ce problème consiste en l'étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$(\star) : \left\{\begin{array}{rcl} u_0 & \in &]0;1[\\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} & = & \sqrt{u_n^2 - u_n + 1} \end{array}\right.$$

Dans tout ce problème, f désignera la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$.

(1). Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - x + 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$.

(2). En déduire le domaine de définition de f, et justifer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini.

(3). À l'aide de la première question, montrer que : $\forall x \in [0;1], \quad f(x) \in [0;1]$.

(4). En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0;1]$.

(5). Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $f'(x)$.

(6). Dresser le tableau des variations de f sur $[0;1]$.

(7). Montrer que : $\forall x \in [0;1], \quad f(x) \geq x$.

(8). Montrer que : $\forall x \in [0;1], \quad |f'(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(9). Calculer $f(1)$.

(10). En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |1 - u_{n+1}| \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}} |1 - u_n|$

(11). En déduire alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une majoration de $|1 - u_n|$ en fonction de n et de $|1 - u_0|$.

(12). En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Éléments de correction

(1). Un développement de l'expression proposée donne directement que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = x^2 - x + 1$$

(2). On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\dfrac{3}{4}}_{\geq 0} \geq 0$

Par conséquent, le domaine de définition de la fonction f est $\mathbb{R}$.

Montrons par récurrence sur l'entier n que u_n est bien défini.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\mathcal{P}(n)$:« u_n est bien défini »

Montrons par récurrence sur l'entier n que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Initialisation : l'entier u_0 est par définition un réel de $[0;1]$, donc il est bien défini. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, c'est à dire que u_n est bien défini. Montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$, c'est à dire que u_{n+1} est bien défini.

Par hypothèse de récurrence, u_n existe et appartient à $\mathbb{R}$. Ainsi d'après la question précédente, $u_n^2 - u_n + 1 \geq 0$ et par suite la quantité $\sqrt{u_n^2 - u_n + 1}$ est bien définie, c'est à dire que u_{n+1} est bien défini, ce qui est $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie, et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.

(3). Soit $x \in [0;1]$. On a alors : $-\dfrac{1}{2} \leq x - \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{2}$

donc : $0 \leq \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 \leq \dfrac{1}{4}$

et ainsi : $0 \leq \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 \leq \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \leq \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}$

ce qui donne : $\quad 0 \leq \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \leq 1$

pour en déduire que : $\quad 0 \leq x^2 - x + 1 \leq 1$

Finalement : $\quad 0 \leq \sqrt{x^2 - x + 1} \leq \sqrt{1}$ par croissance de la fonction racine.

En conclusion : $\quad \forall x \in [0;1]\,, \quad 0 \leq f(x) \leq 1$

(4). Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: ´ $u_n \in [0;1]$ ˝

Montrons par récurrence sur l'entier n que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : par définition $u_0 \in [0;1]$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, c'est à dire que $u_n \in [0;1]$. Montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$, c'est à dire $u_{n+1} \in [0;1]$.

Puisque $u_n \in [0;1]$ par hypothèse de récurrence, d'après la question précédente, $f(u_n) \in [0;1]$, c'est à dire que $\sqrt{u_n^2 - u_n + 1} \in [0;1]$, ce qui donne $u_{n+1} \in [0;1]$ et on a bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \in [0;1]$.

(5). On a : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$

Par suite, la fonction $x \longmapsto x^2 - x + 1$ est positive strictement et dérivable sur $\mathbb{R}$. Par composition avec la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$, la fonction $x \longmapsto f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a alors : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \dfrac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}$

(6). On a clairement que : $\quad 2x - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > \dfrac{1}{2} \qquad$ et $\qquad 2x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{1}{2}$

Le signe de l'expression $f'(x)$ étant donné par celui de $2x - 1$, on en déduit le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0;1]$.

x	0		$\frac{1}{2}$		1
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	1

(7). On a : $\quad (f(x) \geq x)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 - x + 1} - x \geq 0\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{\left(\sqrt{x^2 - x + 1} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1\right)}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} \geq 0\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{x^2 - x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} \geq 0\right) \\
&\Leftrightarrow \left(, \frac{1 - x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} \geq 0\right)
\end{aligned}$$

Puisque pour tout $x \in [0;1]$, $1 - x \geq 0$, le signe de l'expression $\dfrac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x}$ est exactement celui de son dénominateur qui est clairement positif sur l'intervalle $[0;1]$.

Par suite, on en déduit que : $\quad \forall x \in [0;1]\,, \quad f(x) \geq x$.

(8). On a montré précédemment que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \dfrac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}$

D'après le tableau de variation de f sur $[0;1]$, on a : $\quad \forall x \in [0;1]\,, \quad \dfrac{\sqrt{3}}{2} \leq \sqrt{x^2 - x + 1} \leq 1$

Donc par pasage à l'inverse il vient que : $\quad \forall x \in [0;1]\,, \quad 0 < 1 \leq \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} \leq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

On en déduit ainsi que : $\quad \forall x \in]0;1[\,, \quad 0 < \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Par suite, il vient que : $\forall x \in [0;1]\,,\quad \left|\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-x+1}}\right| \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

et donc que : $\forall x \in [0;1]\,,\quad |f'(x)| \leq \dfrac{|2x-1|}{\sqrt{3}}$

La fonction $x \longmapsto 2x-1$ étant strictement croissante sur l'intervalle $[0;1]$ avec pour minimum -1 et maximum 1, on en déduit que :

$$\forall x \in [0;1]\,,\quad |2x-1| \leq 1.$$

Finalement il vient que : $\forall x \in [0;1]\,,\quad |f'(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

(9). On a directement que $f(1)=1$.

(10). La fonction f étant continue sur l'intervalle $[0;1]$ et dérivable sur cet intervalle avec : $\forall x \in [0;1]\,,\quad |f'(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
d'après le théorème des accroissements finis, on a : $\forall\,(x_1,x_2) \in [0;1]\times[0;1]\,,\quad |f(x_1)-f(x_2)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,|x_1-x_2|$

En particulier, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $|f(1)-f(u_n)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,|1-u_n|$ c'est à dire $|1-u_{n+1}| \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,|u_n-1|$.

(11). Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $|1-u_n| \leq \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^n |1-u_0|$ »

Montrons par récurrence sur l'entier n que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Initialisation : on a $|1-u_0| \leq 1\,|1-u_0|$ et comme $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^0 = 1$, il vient bien que $|1-u_0| \leq \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^0 |1-u_0|$ ce qui est $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, c'est à dire que $|1-u_n| \leq \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^n |1-u_0|$ et montrons sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$ c'est à dire $|1-u_{n+1}| \leq \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} |1-u_0|$.

On sait que : $|1-u_{n+1}| \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,|1-u_n|$.

Or par hypothèse de récurrence, on a : $|1-u_n| \leq \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^n |1-u_0|$.

Par suite, il vient que : $|1-u_{n+1}| \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}} \times \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^n |1-u_0|$

c'est à dire que : $|1-u_{n+1}| \leq \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} |1-u_0|$ ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

(12). Puisque $\left|\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right| < 1$, on a que $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, d'après le théorème d'encadrement des limites, il vient que $|1-u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est à dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.