Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question. . . **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2292

Quel est le domaine de définition de la fonction $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3}\right)$?
Justifier votre réponse.

EX. 2 | Réf. 2015

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{j}\right)$, dont on ajustera les unités graphiques en fonction des éléments à construire.
Les **questions (1)**, **(2)** et **(3)** sont indépendantes. Il est donc demandé d'utiliser pour chacune d'entre elle, un nouveau repère et **vous justifierez vos constructions**.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |2x+1| + |-x+2|$.

- **a.** Construire en rouge la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de la fonction f.
- **b.** En déduire la représentation graphique $\mathcal{C}_g$ (en bleu) et $\mathcal{C}_h$ (en vert) des fonctions g et h définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x+1)$ et $h(x) = f(x) - 2$.

2. Soit k la fonction périodique de période $T = 2$ telle que, pour tout $x \in [-2;0]$, $k(x) = \begin{cases} -2x-3 \text{ si } x \in [-2;-1] \\ 2x+1 \text{ si } x \in \,]-1;0] \end{cases}$.

- **a.** Construire en rouge la courbe représentative $\mathcal{C}_k$ de k sur l'intervalle $[-2;0]$.
- **b.** Compléter ce tracé en bleu de sorte à obtenir la représentation graphique de $\mathcal{C}_k$ sur l'intervalle $[-8;6]$.

3. Soit ℓ la fonction périodique de période $T = 2$ telle que : $\begin{cases} \ell \text{ est une fonction impaire} \\ \forall x \in [0;1]\,, \quad \ell(x) = -4x(x-1) \end{cases}$.

- **a.** Dresser le tableau de variation de la fonction $j : \left|\begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -4x(x-1) \end{array}\right.$, puis en construire en rouge la représentation graphique $\mathcal{C}_j$ sur $[0;1]$.
- **b.** En déduire, en bleu, la représentation graphique $\mathcal{C}_\ell$ de ℓ sur l'intervalle $[-6;8]$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2370

Soient f et g les deux fonctions suivantes :

$$f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1-(2x+1)\ln(x) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad g : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(x)}{x^2+x} \end{array}\right.$$

dont on note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives dans un repère orthogonal du plan.

1. On considère $h : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+2x\ln(x)+1 \end{array}\right.$.

- **a.** Déterminer les variations de h sur $\mathbb{R}_+^*$.
- **b.** En déduire le signe de h sur $\mathbb{R}_+^*$.

2.
- **a.** Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de f.
- **b.** Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
- **c.** En déduire le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
- **d.** Justifier l'existence d'un unique réel α tel que $f(x) = 0$.

3. **a.** Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de g.
   b. Exprimer $g\left(\alpha\right)$ en fonction de α.
   c. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   d. En déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}_+^*$.
   e. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 1.
4. Construire $\mathcal{C}_g$.