Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 4018

Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_3)$ est $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Montrer que f est un projecteur de $\mathbb{R}^3$ et identifier ses éléments caractéristiques.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4699

Dans cet exercice on note $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$ et A désigne la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On rappelle que I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3. On note f l'endomorphisme de E canoniquement associé à la matrice A et on note enfin Id_E l'application identité de E et $\tilde{0}_E$ l'application nulle de E dans E.

1. **Un premier calcul de A^n**
   - **a.** Déterminer le rang de f, ainsi que la trace de f.
   - **b.** f est-elle un automorphisme ?
   - **c.** Déterminer le rang de $f - \mathrm{Id}_E$, montrer que le vecteur $u = (1, 1, 1)$ appartient au noyau de $f - \mathrm{Id}_E$ et en déduire $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E)$.
   - **d.** Soient $v = (1, -1, 1)$ et $w = (4, 2, 1)$. Déterminer $f(v)$ et $f(w)$ en fonction de v et w.
   - **e.** Montrer que $\mathcal{C} = (u, v, c)$ est une base de E.
   - **f.** Déterminer sans autre calcul la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$. On notera D cette matrice.
   - **g.** Déterminer P, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ et exprimer pour tout entier naturel n la matrice A^n à l'aide de P, D, n et P^{-1}.
   - **h.** Donner explicitement la première colonne de A^n à l'aide de n.
2. **Une autre expression de A^n**
   - **a.** Vérifier que $f^3 = 2f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E$ où $f^3 = f \circ f \circ f$ et $f^2 = f \circ f$.
   - **b.** En déduire l'inversibilité de A et exprimer A^{-1} à l'aide de I_3, A et A^2.
   - **c.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique triplet $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $A^n = a_n \mathrm{I}_3 + b_n A + c_n A^2$ et que les mêmes valeurs satisfont à : $(\star)\ D^n = a_n \mathrm{I}_3 + b_n D + c_n D^2$
   - **d.** Résoudre le système $(\star)$ et donner a_n, b_n, c_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - **e.** Exprimer pour tout n entier naturel A^n en fonction de I_3, A, A^2 et n.
     La formule demeure-t-elle vraie pour $n = -1$?