Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2292

Quel est le domaine de définition de la fonction $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3}\right)$?

Justifier votre réponse.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2292

- Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction.
- Être capable d'étudier le signe d'un quotient de deux polynômes.

EX. 2 | Réf. 2015

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O\ ;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, dont on ajustera les unités graphiques en fonction des éléments à construire.

Les **questions (1)**, **(2)** et **(3)** sont indépendantes. Il est donc demandé d'utiliser pour chacune d'entre elle, un nouveau repère et **vous justifierez vos constructions**.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |2x+1| + |-x+2|$.

a. Construire en rouge la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de la fonction f.

b. En déduire la représentation graphique $\mathcal{C}_g$ (en bleu) et $\mathcal{C}_h$ (en vert) des fonctions g et h définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x+1)$ et $h(x) = f(x) - 2$.

2. Soit k la fonction périodique de période $T = 2$ telle que, pour tout $x \in [-2;0]$, $k(x) = \begin{cases} -2x-3 \text{ si } x \in [-2;-1] \\ 2x+1 \text{ si } x \in \,]-1;0] \end{cases}$.

a. Construire en rouge la courbe représentative $\mathcal{C}_k$ de k sur l'intervalle $[-2;0]$.

b. Compléter ce tracé en bleu de sorte à obtenir la représentation graphique de $\mathcal{C}_k$ sur l'intervalle $[-8;6]$.

3. Soit ℓ la fonction périodique de période $T = 2$ telle que : $\begin{cases} \ell \text{ est une fonction impaire} \\ \forall x \in [0;1]\,,\quad \ell(x) = -4x(x-1) \end{cases}$.

a. Dresser le tableau de variation de la fonction $j : \left| \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -4x(x-1) \end{array} \right.$, puis en construire en rouge la représentation graphique $\mathcal{C}_j$ sur $[0;1]$.

b. En déduire, en bleu, la représentation graphique $\mathcal{C}_\ell$ de ℓ sur l'intervalle $[-6;8]$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2015

1. a. On commence par exprimer $f(x)$ sans valeurs absolues, où l'on obtient une fonction affine par morceaux qu'il suffit de construire.

b. On obtient les représentations graphiques demandées par translations.

2. a. On construit le « motif » de k comme étant une fonction affine par morceaux.

b. On complète le tracé par report de ce motif.

3. a. j est une fonction polynôme de degré 2...

b. On obtient le tracé de ℓ après avoir construit son « motif ».

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2370

Soient f et g les deux fonctions suivantes :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1-(2x+1)\ln(x) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(x)}{x^2+x} \end{array} \right.$$

dont on note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives dans un repère orthogonal du plan.

1. On considère $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+2x\ln(x)+1 \end{array} \right.$.
   - **a.** Déterminer les variations de h sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - **b.** En déduire le signe de h sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. - **a.** Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de f.
   - **b.** Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   - **c.** En déduire le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - **d.** Justifier l'existence d'un unique réel α tel que $f(x) = 0$.
3. - **a.** Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de g.
   - **b.** Exprimer $g(\alpha)$ en fonction de α.
   - **c.** Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   - **d.** En déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - **e.** Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 1.
4. Construire $\mathcal{C}_g$.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2370

1. - **a.** Calculer $h'(x)$ pour étudier son signe.
   - **b.** Compléter le tableau de variation de sorte à en déduire le signe de h.
2. - **a.** Identifier les éventuelles formes indéterminées, et les gérer.
   - **b.** RAS
   - **c.** Étudier le signe de la dérivée de f après l'avoir mis sous une forme adaptée à une étude de signe et chercher un lien avec h.
   - **d.** Utiliser (proprement) le théorème des valeurs intermédiaires.
3. - **a.** Identifier les éventuelles formes indéterminées, et les gérer.
   - **b.** Utiliser le fait que $f(\alpha) = 0$ et voir le lien avec $g(\alpha)$.
   - **c.** RAS
   - **d.** Remarquer qu'il y a un lien entre f et g'.
   - **e.** Utiliser la formule donnant l'équation réduite de la tangente à une courbe et la simplifier au mieux.
4. Exploiter les éléments précédents pour construire $\mathcal{C}_g$.