Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 4018

Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_3)$ est $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Montrer que f est un projecteur de $\mathbb{R}^3$ et identifier ses éléments caractéristiques.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4018

- On commence par s'assurer que f est bien un projecteur en vérifiant que sa représentation matricielle A satisfait à la relation $A^2 = A$.
- Puis on cherche les invariants par f et le noyau de f pour en déterminer ses éléments caractéristiques.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4699

Dans cet exercice on note $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$ et A désigne la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On rappelle que I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3. On note f l'endomorphisme de E canoniquement associé à la matrice A et on note enfin Id_E l'application identité de E et $\tilde{0}_E$ l'application nulle de E dans E.

1. Un premier calcul de A^n

- **a.** Déterminer le rang de f, ainsi que la trace de f.
- **b.** f est-elle un automorphisme ?
- **c.** Déterminer le rang de $f - \mathrm{Id}_E$, montrer que le vecteur $u = (1, 1, 1)$ appartient au noyau de $f - \mathrm{Id}_E$ et en déduire $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E)$.
- **d.** Soient $v = (1, -1, 1)$ et $w = (4, 2, 1)$. Déterminer $f(v)$ et $f(w)$ en fonction de v et w.
- **e.** Montrer que $\mathcal{C} = (u, v, c)$ est une base de E.
- **f.** Déterminer <u>sans autre calcul</u> la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$. On notera D cette matrice.
- **g.** Déterminer P, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ et exprimer pour tout entier naturel n la matrice A^n à l'aide de P, D, n et P^{-1}.
- **h.** Donner explicitement la première colonne de A^n à l'aide de n.

2. Une autre expression de A^n

- **a.** Vérifier que $f^3 = 2f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E$ où $f^3 = f \circ f \circ f$ et $f^2 = f \circ f$.
- **b.** En déduire l'inversibilité de A et exprimer A^{-1} à l'aide de I_3, A et A^2.
- **c.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique triplet $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $A^n = a_n\mathrm{I}_3 + b_nA + c_nA^2$ et que les mêmes valeurs satisfont à : $(\star)\ D^n = a_n\mathrm{I}_3 + b_nD + c_nD^2$
- **d.** Résoudre le système $(\star)$ et donner a_n, b_n, c_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- **e.** Exprimer pour tout n entier naturel A^n en fonction de I_3, A, A^2 et n.
  La formule demeure-t-elle vraie pour $n = -1$?

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4699

1. **a.** La trace ne pose pas de problème, le rang peut s'obtenir par un échelonnement en ligne ou en colonne.
   b. Le théorème de caractérisation des automorphismes en dimension finie est à mettre en oeuvre ici à partir des éléments trouvés précédemment.
   c. On commence par expliciter la matrice de $f - \mathrm{Id}_E$ pour en obtenir ensuite le rang, et on peut obtenir une base du noyau par un échelonnement en colonnes en ayant au préalable déterminé la dimension du noyau de $f - \mathrm{Id}_E$.
   d. On utilise la matrice de f pour les calculs d'images demandés.
   e. On mobilise tout résultat permettant de montrer qu'une famille est une base.
   f. Les images de u, v et c ayant été calculées, il reste à construire la matrice demandée.
   g. Les formules de changement de base pour les endomorphismes sont à mobiliser pour trouver un lien entre A et D, puis ensuite, on explicite une formule que l'on montrera par récurrence.
   h. On procède aux calculs nécessaires pour obtenir la première colonne de A.
2. **a.** On montrera le résultat en traduisant l'égalité demandée par un calcul matriciel.
   b. La relation précédente donne un polynôme en A qu'il suffit de factoriser judicieusement pour montrer l'inversibilité de A et obtenir son inverse directement.
   c. On procèdera à un raisonnement par récurrence pour montrer les deux relations proposées. La difficulté réside dans l'explicitation de la propriété de récurrence.
   d. On résoud le système avec les techniques usuelles.
   e. On conclut !