Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 1919

Déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ au problème de Cauchy suivant : $(\star)\begin{cases} x''+x'-2x=2\mathrm{e}^{\,t} \\ x(0)=\dfrac{1}{2} \\ x'(0)=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1919

On mettra en oeuvre le plan de résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 :
- Résolution de l'équation homogène associée ;
- Recherche d'une solution particulière ;
- Mise en forme des solutions générales ;
- Réponse au problème de Cauchy.

EX. 2 | Réf. 0111

On considère l'équation différentielle $(\star)$: $x^{(4)}-2x''+x=0$.

1. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 notée $(\diamond)$ telle que :

$$\left(\begin{array}{c} x : t \longmapsto x(t) \text{ est} \\ \text{solution de } (\star) \\ \text{sur } \mathbb{R}\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \text{La fonction } z : t \longmapsto x''(t)-x(t) \\ \text{est solution de } (\diamond) \\ \text{sur } \mathbb{R}\end{array}\right)$$

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(\diamond)$.
3. Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Calculer $f'(t)$ et $f''(t)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$ où $f :\longmapsto \dfrac{1}{2}\alpha t\mathrm{e}^{\,t}-\dfrac{1}{2}\beta t\mathrm{e}^{\,-t}$, en simplifiant au mieux les expressions trouvées.
4. En déduire alors les solutions sur $\mathbb{R}$ de $(\star)$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 0111

1. On exprimera z'' en fonction des dérivées de x et on modifiera $(\star)$ en conséquence pour former $(\diamond)$.
2. La résolution de $(\diamond)$ est directe dans la mesure où il s'agit d'une forme simple d'équation différentielle linéaire d'ordre 2.
3. Il s'agit de procéder à des calculs de dérivées.
4. On obtient une nouvelle équation différentielle vérifiée par x à partir du lien entre x et z, que l'on résout en utilisant la question précédente qui nous donne une solution particulière.

EX. 3 | Réf. 0111

Préparation à l'oral

EX. 4| Réf. 2062

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$, on pose $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer $F_1(x)$.

2. À l'aide d'une intégration par parties de $F_1(x)$, calculer $F_2(x)$, puis en déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$.

3. Calculer $F_3(x)$ et en déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^3}\,\mathrm{d}t$.

EX. 3| Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2062

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 5| Réf. 1190

On considère l'équation différentielle $(\star)$: $t^2x'' + 4tx' + \left(2 - t^2\right)\, x = 1$.
Dans tout ce qui suit $I_1 =]-\infty; 0[$ et $I_2 =]0; +\infty[$.

1. Soit $i \in \{1, 2\}$. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 notée $(\diamond)$ telle que :

$$\begin{pmatrix} x : t \longmapsto x(t) \text{ est} \\ \text{solution de } (\star) \\ \text{sur } I_i \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{La fonction } z : t \longmapsto t^2x(t) \\ \text{est solution de } (\diamond) \\ \text{sur } I_i \end{pmatrix}$$

2. Soit $i \in \{1, 2\}$. Résoudre $(\diamond)$ sur I_i, et en déduire les solutions de $(\star)$ sur I_i.

3. On se propose dans cette question de déterminer s'il existe une solution de $(\star)$ sur $\mathbb{R}$.

a. On suppose que x est une solution de $(\star)$ sur $\mathbb{R}$. Former un développement limité en 0 de x à l'ordre 2.

b. Donner alors l'expression de x sur $\mathbb{R}$ et conclure.

EX. 4| Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1190

1. On commencera par exprimer les dérivées de x en fonction de celles de z, que l'on reportera ensuite dans $(\star)$ pour obtenir $(\diamond)$.

2. $(\diamond)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 que l'on résout « classiquement » : équation homogène, solution particulière, etc.

3. **a.** Il intervient ici le $DL_n\,(0)$ de $t \longmapsto \mathrm{e}^{\,t}$ que permet d'obtenir par opération celui de x.

b. Il faut ajuster les coefficients du $DL_2\,(0)$ de x pour que x soit au moins continue en 0, puis s'assurer ensuite que la fonction obtenue est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

EX. 6| Réf. 1190

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 7| Réf. 3735

On cherche à déterminer l'ensemble des solutions en fonction d'un paramètre réel m de l'équation différentielle (E_m) où :

$$(E_m) : \qquad y'' - (m+1)y' + my = \mathrm{e}^{\,x} - x - 1$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène (H_m) associée à (E_m) en distinguant les cas $m = 1$ et $m \neq 1$.

2. Déterminer une solution particulière de l'équation (E_m) en distinguant les cas $m = 1$, $m = 0$ et $m \notin \{0, 1\}$.
3. Déterminer l'ensemble des solutions en fonction du paramètre m de l'équation différentielle (E_m).

EX. 5 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3735

1. On reconnaît que l'on a affaire à une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants dont l'équation caractéristique dépend de m, et de fait son discriminant aussi...ce qui explique les discussions à mener pour obtenir la forme des solutions de l'équation homogène.
2. On utilisera le principe de superposition des solutions pour obtenir une solution particulière.
3. On met en forme les solutions de l'équation différentielle à l'aide des deux questions précédentes, en essayant d'être très structuré sur la mise en forme des réponses.