Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 4116

Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4116

- On suit le plan classique de diagonalisation des matrices...
- ...en commençant par déterminer le polynôme caractéristique de A...
- puis en déterminant les valeurs propres et les vecteurs propres associés.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4109

Soit $\varphi \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est donnée par : $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice A_φ.
2. Quelles sont les valeurs propres de la matrice A_φ ? Quelle est la dimension de chaque sous-espace propres ? À quelle matrice diagonale D_φ la matrice A_φ est-elle semblable ?
3. Déterminer une base $\left(\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}, \overrightarrow{c_3}\right)$ de vecteurs propres de φ.
4. On pose $D_1 = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{c_1}\right)$. Justifier que D_1 est stable par φ.
5. On pose $P_1 = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{c_2}, \overrightarrow{c_3}\right)$. Montrer que P_1 est stable par φ.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4109

1. On commencera par expliciter le déterminant à calculer, puis on mettra en oeuvre toutes les techniques usuelles de calcul de déterminant. On gardera à l'esprit qu'il faut obtenir une forme factorisée de ce dernier afin d'obtenir facilement les valeurs propres de φ.
2. Ces dernières se lisent directement sur le polynôme caractéristique, et le reste de la question se traite sans avoir à chercher les vecteurs propres correspondants. Attention au théorème mobilisé.
3. On cherche ici les vecteurs propres par les techniques usuelles.
4. On dispose d'un théorème pour conclure...
5. On revient à la définition de ce ce que c'est qu'être stable.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 4117

On considère l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 à coefficients réels. On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et que (A, B, C) est une base de $\mathcal{E}$.
2. Établir que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication, c'est à dire que : $\forall (M, N) \in \mathcal{E}, \quad M \times N \in \mathcal{E}$.
3. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, si M est inversible, alors $M^{-1} \in \mathcal{E}$.
4. On définir alors l'application $f : \begin{array}{|ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ M & \longmapsto & TMT \end{array}$.
   - **a.** Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.
   - **b.** Vérifier que T est inversible et démontrer alors que f est un automorphisme de E.
   - **c.** Est-ce que la matrice T est diagonalisable ?
   - **d.** On note F la matrice de f dans la base (A, B, C) de $\mathcal{E}$.
     - **i.** Montrer que f admet une valeur propre et une seulle et déterminer celle-ci.
     - **ii.** f est-elle diagonalisable ?

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4117

1. On peut répondre aux deux questions en même temps à condition de montrer la liberté de la famille (A, B, C).
2. On effectue le produit matriciel pour deux matrices quelconques de $\mathcal{E}$ et on montre que le produit obtenu est encore dans $\mathcal{E}$.
3. Il est facile d'avoir l'expression de M^{-1} en fonction de M et de conclure...
4. **a.** RAS
   - **b.** RAS pour l'inversibilité de T. Pour le caractère bijectif de f utiliser le théorème de caractérisation des endomorphismes bijectifs en n'étudiant que le caractère injectif de f.
   - **c.** La réponse est dans la question.
   - **d.** **i.** Commencer par exprimer F pour obtenir les éléments propres de f demandés.
     - **ii.** Raisonner par l'absurde pour conclure.

EX. 4 | Réf. 4199

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour $\theta \neq 0 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\Delta_n(\theta) = \det\left(A + (2\cos(\theta)\mathrm{I}_n)\right)$.

1. Calculer $\Delta_1(\theta)$ et $\Delta_2(\theta)$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, on a : $\Delta_n(\theta) = 2\cos(\theta)\Delta_{n-1}(\theta) - \Delta_{n-2}(\theta)$.
3. Montrer par récurrence que : $\forall n \geq 1, \quad \Delta_n(\theta) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.
4. Donner alors les valeurs propres de A.

EX. 4 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4199

1. C'est un calcul direct.
2. Développer deux fois suivant une ligne ou une colonne pour obtenir la relation proposée.

3. On effectue le raisonnement par récurrence demandé en utilisant en particulier ses formules de trigonométrie.

4. Exploiter le calcul de $\Delta_n(\theta)$ par rapport au problème de recherche de valeurs propres pour A.