À noter & À garder en tête

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout.
Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

Exercice| [2153] | 1| Équivalents

Soit $\beta > 0$. Déterminer un équivalent de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x}-1}{x^{\beta}\mathrm{e}^{x}}$ au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$.

Pistes de réflexion

- En 0, on a un équivalent classique pour $\mathrm{e}^{x}-1$ et il suffit de l'utiliser...
- En $+\infty$, $\mathrm{e}^{x}-1$ et e^{x} ne devraient pas être bien différents...

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [2384] | 2| Suites numériques

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_1 & = & 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} & = & u_{n+1} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} u_n \end{array}\right.$

On se propose dans cet exercice de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

(1). Montrer par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0.$

(2). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le signe de $u_{n+2} - u_{n+1}$.
En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(3). Soit $f : \left|\begin{array}{ccc}]-1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+x) - x \end{array}\right.$

(a). Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in]-1;+\infty[$, puis en étudier le signe sur $]-1;+\infty[$.

(b). En déduire les variations de f sur $]-1;+\infty[$.

(c). En déduire alors que : $\forall x \in]-1;+\infty[, \quad \ln(1+x) \leq x.$

(4). Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq u_1 \times \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\right)$

On pourra commencer par montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq \left(1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}\right) u_n.$

(5). On définit la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\right).$

(a). Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s_n \leq 1.$

(b). En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\right) \leq \mathrm{e}.$

(6). Montrer alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

(7). Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donner un majorant de sa limite.

Pistes de réflexion

(1). S'attacher à rédiger correctement sa récurrence double...

(2). Le signe de $u_{n+2} - u_{n+1}$ s'obtient à partir de la définition de la suite, et on en déduit alors le signe de $u_{n+1} - u_n$ et les variations de $(u_n)_{n\geq 1}$.

(3).(a). Dériver une fonction du type $\ln(u)$ et étudier le signe d'un quotient.

(b). Dresser le tableau de variation d'une fonction.

(c). Exploiter l'étude de fonction précédente pour en déduire un majorant de la fonction f puis l'inégalité demandée.

(4). Partir de u_{n+2} et majorer ce dernier en utilisant le fait que la suite est croissante.

(5).(a). Utiliser $\sum_{k=0}^{n} q^k$ pour majorer la somme s_n à l'aide de l'inégalité établie à la question précédente.

(b). Utiliser les propriétés du logarithme népérien.

(6). Exploiter une majoration pour en déduire une majoration du terme général d'une suite.

(7). Utiliser le théorème de la limite monotone.