Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2002

1. Résoudre les deux équations suivantes :

a. $\cos(3x) = \dfrac{1}{2}$; **b.** $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2. On se propose de résoudre l'équation (E) : $\sin(x) + \cos(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

a. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos(x) + \sin(x)$.

b. Montrer alors que : $(E) \Leftrightarrow \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

c. En déduire la résolution de (E).

3. Soient x et y deux réels de l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ tels que $\cos(x) = \dfrac{3}{5}$ et $\cos(y) = \dfrac{1}{3}$.
Calculer $\sin(2x - y)$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2002

1. a. On a : $\cos(3x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(3x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k'\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3} \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2k'\pi}{9} \end{cases}$

où $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$.

b. On a : $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$
$\begin{cases} 2x - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x - \dfrac{\pi}{4} = \pi - \left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + 2k'\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{24} + k\pi \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{19\pi}{24} + k'\pi \end{cases}$ où $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$.

2. a. On a : $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos(x)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \sin(x)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)$, d'où le résultat en multipliant par $\sqrt{2}$.

b. On en déduit que : $(E) \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \Leftrightarrow$
$\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

c. On a : $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{6} + 2k'\pi \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} x = \dfrac{13\pi}{12} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{7\pi}{12} + 2k'\pi \end{cases}$ où $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$.

3. On développe : $\sin(2x - y) = \sin(2x)\cos(y) - \cos(2x)\sin(y)$, puis on utilise $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ et $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$. On obtient $\sin(y)$ à l'aide de la relation $\cos^2(y) + \sin^2(y) = 1$ et comme $y \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin(y) \geq 0$.

On obtient sur le même principe la valeur de $\sin(x)$. On remplace alors les valeurs obtenues dans $\sin(2x-y) = 2\sin(x)\cos(x)\cos(y) - \left(2\cos^2(x)-1\right)\sin(y)$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2291

1. Soit $h : x \longmapsto x + \sqrt{x^2+1}$.

a. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_h$ de h ?

b. Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_h$.

c. Étudier le signe de $h'(x)$ sur $\mathcal{D}_h$ et en déduire les variations de h sur $\mathcal{D}_h$.

d. Étudier les limites de h aux bornes de $\mathcal{D}_h$.

e. En déduire le signe de h sur $\mathcal{D}_h$.

2. Soit $f : x \longmapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

a. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f ?

b. Étudier la parité de f.

3. Soit $g : x \longmapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+4}\right)$. On admet que $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$.

a. Démontrer que : $\qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(2x) = f(x) + \ln(2).$

b. Démontrer que dans un repère orthonormé $\left(O\,;\, \overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{j}\right)$ du plan, le point $K\,(0, \ln(2))$ est un centre de symétrie de la courbe représentative de g.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2291

1. a. L'expression $h(x)$ n'a de sens que si $x^2+1 \geq 0$ puisque l'on ne peut pas prendre la racine carrée d'un nombre négatif. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 > 1 \geq 0$. Par suite $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$.

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

c. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 < x^2+1$. Ainsi, $\sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1}$. Or $\sqrt{x^2} = |x|$ et $x \leq |x|$. Ainsi, $x < \sqrt{x^2+1}$.
Par ailleurs, puisque $x^2+1 > 0$, il vient $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$.
De même, $-x \leq |x|$, donc $-x < \sqrt{x^2+1}$ et il vient $\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$ c'est à dire $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} > -1$. Finalement, on obtient bien : $\qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| < 1.$
Par conséquent, il vient que : $\qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 + \dfrac{x}{x+\sqrt{x^2+1}} > 0$. Ainsi, $h'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
On en déduit son tableau de variations sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $h'(x)$	$+$	
Variations de h	0	$\nearrow$ $+\infty$

d.
- Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+1 = +\infty$, il vient par composition que $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ et par suite que $h(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{x^2+1} = \dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{x-\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}$. Or $\lim\limits_{x\to-\infty} x - \sqrt{x^2+1} = -\infty$. Par suite, il vient $h(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$.

e. Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=0$ et que h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, il vient que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $h(x)>0$.

2. a. Il est immédiat que f: $x\longmapsto \ln(h(x))$. Or on a prouvé précédement que $h(x)>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Par suite, il vient que $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$.

b.
- Pour tout $x\in\mathcal{D}_f$, $x-\in\mathcal{D}_f$.
- Pour tout $x\in\mathcal{D}_f$: $\begin{array}{rcl} f(-x) & = & \ln\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right) \\ & = & \ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)\end{array}$.

Or $-x+\sqrt{x^2+1}=\dfrac{\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x+\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$. Donc, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(-x)=\ln\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)=-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=-f(x)$.

Ainsi, f est impaire.

3. a. Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\begin{array}{rcl} g(2x) & = & \ln\left(2x+\sqrt{4x^2+4}\right) \\ & = & \ln\left(2x+\sqrt{4\left(x^2+1\right)}\right) \\ & = & \ln\left(2x+2\sqrt{x^2+1}\right) \\ & = & \ln\left(2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right) \\ & = & \ln(2)+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\end{array}$

b. Dire que K est centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_g$ signifie que si $M(x,g(x))\in\mathcal{C}_g$, alors son symétrique $M'(x',y')$ par rapport à K appartient à $\mathcal{C}_g$.

Soit alors $M(x,g(x))$. Son symétrique $M'(x',y')$ par rapport à K est donc tel que $\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{KM'}$ ce qui donne $\begin{cases} -x=x' \\ \ln(2)-g(x)=y'-\ln(2)\end{cases}$.

On doit donc vérifier si le point $M'(-x,\ln(2)-g(x))\in\mathcal{C}_g$, ce qui est le cas dès lors que $g(-x)=2\ln(2)-g(x)$.

Or $g(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{x^2+4}\right)$. Par ailleurs, $\ln\left(-x+\sqrt{x^2+4}\right)=\ln\left(\dfrac{\left(-x+\sqrt{x^2+4}\right)\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)}{x+\sqrt{x^2+4}}\right)=\ln\left(\dfrac{4}{x+\sqrt{x^2+4}}\right)=\ln(4)-\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)=2\ln(2)-g(x)$, ce qui est bien le résultat voulu.