Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 1919

Déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ au problème de Cauchy suivant : $(\star)\begin{cases} x''+x'-2x=2\mathrm{e}^{\,t} \\ x(0)=\dfrac{1}{2} \\ x'(0)=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 1919

Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène $(\star_H)$: $x''+x'-2x=0$ associée à $(\star)$: il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2.

Résolution de l'équation caractéristique associée à $(\star)$: l'équation caractéristique associée à $(\star)$ est l'équation (E_c) : $r^2+r-2=0$ d'inconnue le réel r.

Puisque le discriminant Δ de (E_c) vaut 9, on en déduit que (E_c) admet deux solutions réelles $r_1=1$ et $r_2=-2$.

Solution de $(\star_H)$ sur $\mathbb{R}$: les solutions de $(\star_H)$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions :

$$x_H : t \longmapsto C_1\mathrm{e}^{\,t}+C_2\mathrm{e}^{\,-2t},\ \text{ où } (C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$$

Recherche d'une solution particulière de $(\star)$ sur $\mathbb{R}$: comme le second membre de $(\star)$ est la fonction $t\longmapsto 2\mathrm{e}^{\,1\times t}$ et que 1 est racine simple de (E_c), on cherche une solution particulière x_P de $(\star)$ sur $\mathbb{R}$ sous la forme $x_P : t\longmapsto Kt\mathrm{e}^{\,t}$ où $K\in\mathbb{R}$.

On a donc :
$$\begin{aligned} \forall t\in\mathbb{R},\ x_P'(t) &= K\mathrm{e}^{\,t}+Kt\mathrm{e}^{\,t} \\ x_P''(t) &= K\mathrm{e}^{\,t}+K\mathrm{e}^{\,t}+Kt\mathrm{e}^{\,t} \\ &= 2K\mathrm{e}^{\,t}+Kt\mathrm{e}^{\,t}\end{aligned}$$

Il vient donc :
$$\begin{aligned} (\,x_P \text{ est solution de } (\star) \text{ sur } \mathbb{R}\,) &\Leftrightarrow (\forall t\in\mathbb{R},\ x_P''(t)+x_P'(t)-2x_P(t)=2\mathrm{e}^{\,t}\,) \\ &\Leftrightarrow (\forall t\in\mathbb{R},\ 2K\mathrm{e}^{\,t}+Kt\mathrm{e}^{\,t}+K\mathrm{e}^{\,t}+Kt\mathrm{e}^{\,t}-2Kt\mathrm{e}^{\,t}=2\mathrm{e}^{\,t}\,) \\ &\Leftrightarrow (\forall t\in\mathbb{R},\ 3K\mathrm{e}^{\,t}=2\mathrm{e}^{\,t}\,) \\ &\Leftrightarrow (\forall t\in\mathbb{R},\ 3K=2\,) \text{ puisque : } \forall t\in\mathbb{R},\ \mathrm{e}^{\,t}\neq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\forall t\in\mathbb{R},\ K=\frac{2}{3}\right)\end{aligned}$$

Par suite, on en déduit que la fonction $x_P : t\longmapsto \dfrac{2}{3}t\mathrm{e}^{\,t}$ est solution de $(\star)$ sur $\mathbb{R}$.

Mise en forme des solutions de $(\star)$ sur $\mathbb{R}$: les solutions sur $\mathbb{R}$ de $(\star)$ sont les fonctions :

$$x : t\longmapsto C_1\mathrm{e}^{\,t}+C_2\mathrm{e}^{\,-2t}+\frac{2}{3}t\mathrm{e}^{\,t} \text{ où } (C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$$

Solution au problème de Cauchy $(\star)$: la solution x au problème de Cauchy $(\star)$ sur $\mathbb{R}$ est de la forme $x : t\longmapsto C_1\mathrm{e}^{\,t}+C_2\mathrm{e}^{\,-2t}+\dfrac{2}{3}t\mathrm{e}^{\,t}$ où $(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$.

Or on a :
$$\begin{aligned} x(0) &= C_1\mathrm{e}^{\,0}+C_2\mathrm{e}^{\,-2\times 0}+\frac{2}{3}\times 0\times\mathrm{e}^{\,0} \\ &= C_1+C_2\end{aligned}$$

De plus, puisque :
$$\begin{aligned} \forall t\in\mathbb{R},\ x'(t) &= C_1\mathrm{e}^{\,t}-2C_2\mathrm{e}^{\,-2t}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{\,t}+\frac{2}{3}t\mathrm{e}^{\,t} \\ \text{et donc : } x'(0) &= C_1\mathrm{e}^{\,0}-2C_2\mathrm{e}^{\,-2\times 0}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{\,0}+\frac{2}{3}\times 0\times\mathrm{e}^{\,t} \\ &= C_1-2C_2+\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Ainsi, $(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$ est solution du système $(\mathcal{S})$: $\begin{cases} C_1+C_2=\dfrac{1}{2} \\ C_1-2C_2+\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ qui est équivalent à

$\begin{cases} C_1 + C_2 = \dfrac{1}{2} \\ C_1 - 2C_2 = -\dfrac{7}{6} \end{cases}$, que l'on résout par échelonnement en lignes :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -2 & -\frac{7}{6} \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -3 & -\frac{5}{3} \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{3} L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{9} \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{18} \\ 0 & 1 & \frac{5}{9} \end{array}\right)$$

et ainsi $(C_1, C_2) = \left(-\dfrac{1}{18}, \dfrac{5}{9}\right)$.

Finalement, la solution sur $\mathbb{R}$ au problème de Cauchy $(\star)$ est :

$$x : t \longmapsto \frac{5}{9}\mathrm{e}^{-2t} - \frac{1}{18}\mathrm{e}^{t} + \frac{2}{3}t\mathrm{e}^{t}$$

EX. 2 | Réf. 0111

On considère l'équation différentielle $(\star)$: $x^{(4)} - 2x'' + x = 0$.

1. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 notée $(\diamond)$ telle que :

$$\left(\begin{array}{c} x : t \longmapsto x(t) \text{ est} \\ \text{solution de } (\star) \\ \text{sur } \mathbb{R} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \text{La fonction } z : t \longmapsto x''(t) - x(t) \\ \text{est solution de } (\diamond) \\ \text{sur } \mathbb{R} \end{array}\right)$$

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(\diamond)$.

3. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $f'(t)$ et $f''(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ où $f :\longmapsto \dfrac{1}{2}\alpha t\mathrm{e}^{t} - \dfrac{1}{2}\beta t\mathrm{e}^{-t}$, en simplifiant au mieux les expressions trouvées.

4. En déduire alors les solutions sur $\mathbb{R}$ de $(\star)$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 0111

1. On a directement que :
$$\left(\begin{array}{c} x : t \longmapsto x(t) \text{ est} \\ \text{solution de } (\star) \\ \text{sur } \mathbb{R} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\forall t \in \mathbb{R},\, x^{(4)}(t) - 2x''(t) + x(t) = 0\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\forall t \in \mathbb{R},\, x^{(4)}(t) - x''(t) - (x''(t) - x(t)) = 0\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\forall t \in \mathbb{R},\, (x'' - x)''(t) - (x'' - x)(t) = 0\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \text{La fonction } z : t \longmapsto x''(t) - x(t) \\ \text{est solution de} \\ (\diamond) : z'' - z = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \end{array}\right)$$

2. Les solutions de l'équation $(\diamond)$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $t :\longmapsto C_1\mathrm{e}^{t} + C_2\mathrm{e}^{-t}$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

3. Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R},\, f'(t) &= \frac{1}{2}\alpha\mathrm{e}^{t}(t+1) + \frac{1}{2}\beta\mathrm{e}^{-t}(t-1) \\ \text{et : } f''(t) &= \frac{1}{2}\alpha\mathrm{e}^{t}(t+2) + \frac{1}{2}\beta\mathrm{e}^{-t}(2-t) \end{aligned}$$

4. Les solutions de $(\diamond)$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $t :\longmapsto C_1\mathrm{e}^{t} + C_2\mathrm{e}^{-t}$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi d'après la question 1 :

$$\left(\begin{array}{c} x : t \longmapsto x(t) \text{ est} \\ \text{solution de } (\star) \\ \text{sur } \mathbb{R} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2,\, \forall t \in \mathbb{R},\, x''(t) - x(t) = C_1\mathrm{e}^{t} + C_2\mathrm{e}^{-t}\right)$$

Résolvons alors sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(\clubsuit)$: $x'' - x = C_1\mathrm{e}^{t} + C_2\mathrm{e}^{-t}$.

Résolution de l'équation homogène $(\clubsuit_H)$: $x'' - x = 0$ associée à $(\clubsuit)$ sur $\mathbb{R}$: les solutions de $(\clubsuit_H)$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions :

$$x_H : t \longmapsto D_1\mathrm{e}^{t} + D_2\mathrm{e}^{-t} \text{ où } (D_1, D_2) \in \mathbb{R}^2$$

Recherche d'une solution particulière de $(\clubsuit)$ sur $\mathbb{R}$: on remarque que toute fonction $f : t \longmapsto \alpha\,(t\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{t}) +$

$\dfrac{1}{2}\beta e^{-t}$ où $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ est telle que :

$$\begin{aligned}\forall t\in\mathbb{R},\ f''(t)-f(t) &= \frac{1}{2}\alpha e^{t}(t+2)+\frac{1}{2}\beta e^{-t}(2-t)-\left(\frac{1}{2}\alpha t e^{t}-\frac{1}{2}\beta t e^{-t}\right)\\ &= \alpha e^{t}+\beta e^{-t}\end{aligned}$$

et par suite, qu'elle est solution de (♣) sur $\mathbb{R}$ dès lors que $\alpha=C_1$ et $\beta=C_2$.

Mise en forme des solutions de (♣) sur $\mathbb{R}$: les solutions de (♣) sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions :

$$t\longmapsto D_1 e^{t}+D_2 e^{-t}+\frac{1}{2}C_1 t e^{t}-\frac{1}{2}C_2 t e^{-t}\ \text{où}\ (D_1,D_2,C_1,C_2)\in\mathbb{R}^4$$

En conclusion les solutions de $(\star)$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions :

$$t\longmapsto D_1 e^{t}+D_2 e^{-t}+\frac{1}{2}D_3 t e^{t}-\frac{1}{2}D_4 t e^{-t}\ \text{où}\ (D_1,D_2,D_3,D_4)\in\mathbb{R}^4$$

EX. 3 | Réf. 0111

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 0111

Préparation à l'oral

EX. 4 | Réf. 2062

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\geq 0$, on pose $F_n(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer $F_1(x)$.

2. À l'aide d'une intégration par parties de $F_1(x)$, calculer $F_2(x)$, puis en déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$.

3. Calculer $F_3(x)$ et en déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^3}\,\mathrm{d}t$.

EX. 4 | Éléments de correction | Réf. 2062

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 5 | Réf. 1190

On considère l'équation différentielle $(\star)$: $t^2x''+4tx'+\left(2-t^2\right)x=1$.
Dans tout ce qui suit $I_1=]-\infty;0[$ et $I_2=]0;+\infty[$.

1. Soit $i\in\{1,2\}$. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 notée $(\diamond)$ telle que :

$$\begin{pmatrix}x:t\longmapsto x(t)\text{ est}\\ \text{solution de }(\star)\\ \text{sur } I_i\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\text{La fonction } z:t\longmapsto t^2x(t)\\ \text{est solution de }(\diamond)\\ \text{sur } I_i\end{pmatrix}$$

2. Soit $i\in\{1,2\}$. Résoudre $(\diamond)$ sur I_i, et en déduire les solutions de $(\star)$ sur I_i.

3. On se propose dans cette question de déterminer s'il existe une solution de $(\star)$ sur $\mathbb{R}$.

a. On suppose que x est une solution de $(\star)$ sur $\mathbb{R}$. Former un développement limité en 0 de x à l'ordre 2.

b. Donner alors l'expression de x sur $\mathbb{R}$ et conclure.

EX. 5 | Éléments de correction | Réf. 1190

1. En posant $x : t \longmapsto \dfrac{z(t)}{t^2}$ sur I_i, on a :

$$\begin{aligned}
\forall t \in I_i,\ x'(t) &= z'(t)\times\frac{1}{t^2} - z(t)\times\left(-\frac{2}{t^3}\right)\\
&= \frac{z'(t)}{t^2} - \frac{2z(t)}{t^3}\\
\text{et : } x''(t) &= z''(t)\times\frac{1}{t^2} + z'(t)\times\left(-\frac{2}{t^3}\right) - z'(t)\times\frac{2}{t^3} - z(t)\times\left(\frac{3}{t^4}\right)\\
&= \frac{z''(t)}{t^2} - \frac{4z'(t)}{t^3} + \frac{6z(t)}{t^4}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x : t\longmapsto x(t) \text{ est}\\ \text{solution de } (\star)\\ \text{sur } I_i\end{pmatrix}
&\Leftrightarrow \left(\forall t\in I_i,\ t^2x''(t)+4tx'(t)+\left(2-t^2\right)x(t)=1\right)\\
&\Leftrightarrow \left(\forall t\in I_i,\ t^2\times\left(\frac{z''(t)}{t^2}-\frac{4z'(t)}{t^3}+\frac{6z(t)}{t^4}\right)+4t\left(\frac{z'(t)}{t^2}-\frac{2z(t)}{t^3}\right)+\left(2-t^2\right)\times\right.\\
&\Leftrightarrow \left(\forall t\in I_i,\ z''(t)-\frac{4z'(t)}{t}+\frac{6z(t)}{t^2}+\frac{4z'(t)}{t}-\frac{8z(t)}{t^2}+\frac{2z(t)}{t^2}-z(t)=1\right)\\
&\Leftrightarrow \left(\forall t\in I_i,\ z''(t)-z(t)=1\right)\\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix}\text{La fonction } z : t\longmapsto t^2x(t)\\ \text{est solution de } (\diamond) : z''-z=1\\ \text{sur } I_i\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La fonction $t\longmapsto -1$ est clairement solution de $(\diamond)$ sur I_i, et les solutions de l'équation homogène associée à $(\diamond)$ sont les fonctions $t\longmapsto C_1\mathrm{e}^{\,t}+C_2\mathrm{e}^{\,-t}$ où $(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$.
Par suite, les solutions sur I_i de $(\diamond)$ sont : $t\longmapsto -1+C_1\mathrm{e}^{\,t}+C_2\mathrm{e}^{\,-t}$ où $(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$.
On en déduit alors que les fonctions solutions de $(\star)$ sur I_i sont les fonctions :

$$t\longmapsto \frac{1}{t^2}\left(-1+C_1\mathrm{e}^{\,t}+C_2\mathrm{e}^{\,-t}\right)\ \text{ où }\ (C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$$

2. **a.** Puisque x est solution de $(\star)$ sur $\mathbb{R}$, il existe donc $(C_1,C_2,C_3,C_4)\in\mathbb{R}^4$ tels que :

$$\forall t\in\,]-\infty;0[\,,\ x(t)=\frac{1}{t^2}\left(-1+C_1\mathrm{e}^{\,t}+C_2\mathrm{e}^{\,-t}\right)\quad\text{ et }\forall t\in\,]0;+\infty[\,,\ x(t)=\frac{1}{t^2}\left(-1+C_3\mathrm{e}^{\,t}+C_4\mathrm{e}^{\,-t}\right)$$

Un développement limité en 0 de la fonction $f : t\longmapsto \dfrac{1}{t^2}\left(-1+\alpha\mathrm{e}^{\,t}+\beta\mathrm{e}^{\,-t}\right)$ où $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ est :

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{t^2}\left(-1+\alpha\left(1+t+\frac{t^2}{2}+\underset{t\to0}{o}\left(t^2\right)\right)+\beta\left(1-t+\frac{t^2}{2}+\underset{t\to0}{o}\left(t^2\right)\right)\right)\\
&= \frac{1}{t^2}\left(\alpha+\beta-1+(\alpha-\beta)\,t+(\alpha+\beta)\,\frac{t^2}{2}+\underset{t\to0}{o}\left(t^2\right)\right)\\
&= \frac{\alpha+\beta-1}{t^2}+\frac{\alpha-\beta}{t}+\frac{\alpha+\beta}{2}+\underset{t\to0}{o}(1)
\end{aligned}$$

On en déduit donc le développement limité de x en 0

b. Pour que la fonction f introduite à la question précédente possède une limite finie en 0, il suffit alors que (α,β) soient tels que $\begin{cases}\alpha+\beta-1=0\\ \alpha-\beta=0\end{cases}$ c'est à dire que $(\alpha,\beta)=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.
Soit alors $x : t\longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\,t}+\mathrm{e}^{\,-t}-2}{2t^2}$. D'après le développement limité précédent, cette fonction possède une limite en 0 qui vaut $\dfrac{1}{2}$, et par suite est prolongeable par continuité en 0 par $x\,(0)=\dfrac{1}{2}$.
Sous réserve d'établir que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, elle est alors solution de $(\star)$ sur $\mathbb{R}$.

EX. 6 | Réf. 1190

EX. 6 | Éléments de correction | Réf. 1190

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 7 | Réf. 3735

On cherche à déterminer l'ensemble des solutions en fonction d'un paramètre réel m de l'équation différentielle (E_m) où :

$$(E_m): \qquad y'' - (m+1)y' + my = \mathrm{e}^{x} - x - 1$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène (H_m) associée à (E_m) en distinguant les cas $m = 1$ et $m \neq 1$.
2. Déterminer une solution particulière de l'équation (E_m) en distinguant les cas $m = 1$, $m = 0$ et $m \notin \{0, 1\}$.
3. Déterminer l'ensemble des solutions en fonction du paramètre m de l'équation différentielle (E_m).

EX. 7 | Éléments de correction | Réf. 3735

1. (E_m) est une équation différentielle linéaire à coefficients constant de degré 2. Son équation caractéristique est $r^2 - (m+1)r + m = 0$ qui a pour discriminant $\delta = (m-1)^2 \geq 0$. Ainsi :

   Si $m \neq 1$: l'équation caractéristique admet deux solutions réelles $r_1 = \dfrac{m+1-\sqrt{(m-1)^2}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{m+1+\sqrt{(m-1)^2}}{2}$

   En remarquant que $\sqrt{(m-1)^2} = |m-1|$, il vient de plus que :

   $m + 1 - \sqrt{(m-1)^2} = \begin{cases} m+1-(m-1) = 2 \text{ si } m > 1 \\ m+1-(1-m) = 2m \text{ si } m < 1 \end{cases}$ et $m + 1 + \sqrt{(m-1)^2} = \begin{cases} m+1+(m-1) = 2m \text{ si } m > 1 \\ m+1-(m-1) = 2 \text{ si } m < 1 \end{cases}$

   Autrement dit, dans tous les cas $(r_1, r_2) \in \{(1, m), (m, 1)\}$.

   On en déduit que les solutions de (H_m) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \longmapsto C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{mx}$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

   Si $m = 1$: l'équation caractéristique n'admet qu'une seule solution $r_0 = -\dfrac{-(m+1)}{2}$ c'est à dire $r_0 = 1$ et les solutions sur $\mathbb{R}$ sont alors dans ce cas les fonctions $x \longmapsto (C_1x + C_2)\,\mathrm{e}^{x}$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

2. On va chercher une solution particulière de (E_m) en utilisant le principe de superposition des solutions.

   On note alors $\begin{cases} (A_m) : y'' - (m+1)y' + my = \mathrm{e}^{x} \\ (B_m) : y'' - (m+1)y' + my = -x - 1 \end{cases}$.

   Recherche d'une solution particulière de (A_m) : on cherche une solution particulière y_a de (A_m) sous la forme :

   Si $m \neq 1$: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_a(x) = Cx\mathrm{e}^{x}$ où $C \in \mathbb{R}$ puisque 1 est racine simple de l'équation caractéristique associée à (A_m).

   On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} y_a(x) &= Cx\mathrm{e}^{x} \\ y_a'(x) &= C\mathrm{e}^{x} + Cx\mathrm{e}^{x} \\ y_a''(x) &= 2C\mathrm{e}^{x} + Cx\mathrm{e}^{x} \end{aligned}$

   Ainsi : $\begin{pmatrix} y_a \text{ est solution de} \\ (A_m) \text{ sur } \mathbb{R} \end{pmatrix}$ $\begin{aligned} &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_a''(x) - (m+1)y_a'(x) + my_a(x) = \mathrm{e}^{x}) \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2C\mathrm{e}^{x} + Cx\mathrm{e}^{x} - (m+1)(C\mathrm{e}^{x} + Cx\mathrm{e}^{x}) + Cmx\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}) \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, C\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}) \end{aligned}$

   Ainsi, par identification, $C = 1$ et par suite la fonction $y_a : x \longmapsto x\mathrm{e}^{x}$ est solution de (A_m) sur $\mathbb{R}$.

   Si $m = 1$: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_a(x) = Cx^2\mathrm{e}^{x}$ où $C \in \mathbb{R}$ puisque 1 est racine double de l'équation caractéristique associée à (A_m).

   On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} y_a(x) &= Cx^2\mathrm{e}^{x} \\ y_a'(x) &= 2Cx\mathrm{e}^{x} + Cx^2\mathrm{e}^{x} \\ y_a''(x) &= 2C\mathrm{e}^{x} + 4Cx\mathrm{e}^{x} + Cx^2\mathrm{e}^{x} \end{aligned}$

   Ainsi : $\begin{pmatrix} y_a \text{ est solution de} \\ (A_m) \text{ sur } \mathbb{R} \end{pmatrix}$ $\begin{aligned} &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_a''(x) - (m+1)y_a'(x) + my_a(x) = \mathrm{e}^{x}) \\ &\Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2C\mathrm{e}^{x} + 4Cx\mathrm{e}^{x} + Cx^2\mathrm{e}^{x} - 2\left(2Cx\mathrm{e}^{x} + Cx^2\mathrm{e}^{x}\right) + Cx^2\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}\right) \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, 2C\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}) \end{aligned}$

   Ainsi, par identification, $C = \dfrac{1}{2}$ et par suite la fonction $y_a : x \longmapsto \dfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{x}$ est solution de (A_m) sur $\mathbb{R}$.

   Recherche d'une solution particulière de (B_m) : on cherche une solution particulière y_b de (B_m) sous la forme :

Si $m \neq 0$ **:** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_b(x) = \alpha x + \beta$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{array}{rcl} y_b(x) & = & \alpha x + \beta \\ y_b'(x) & = & \alpha \\ y_b''(x) & = & 0 \end{array}$

Ainsi : $\begin{pmatrix} y_b \text{ est solution de} \\ (B_m) \text{ sur } \mathbb{R} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \Leftrightarrow \quad (\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_b''(x) - (m+1)y_b'(x) + my_b(x) = -x-1) \\ \Leftrightarrow \quad (\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 - (m+1)\alpha + m\alpha x + m\beta = -x-1) \\ \Leftrightarrow \quad (\forall x \in \mathbb{R}, m\alpha x + m\beta - (m+1)\alpha = -x-1) \end{array}$

Ainsi, par identification, (α, β) est solution du système $\begin{cases} m\alpha = -1 \\ m\beta - (m+1)\alpha = -1 \end{cases}$ qui donne $\alpha = -\dfrac{1}{m}$ et $\beta = \dfrac{-1-2m}{m^2}$ et par suite la fonction $y_b : x \longrightarrow -\dfrac{1}{m}x - \dfrac{2m+1}{m^2}$ est solution de (B_m) sur $\mathbb{R}$.

Si $m = 0$ **:** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_b(x) = \alpha x^2 + \beta x$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{array}{rcl} y_b(x) & = & \alpha x^2 + \beta x + \gamma \\ y_b'(x) & = & 2\alpha x + \beta \\ y_b''(x) & = & 2\alpha \end{array}$

Ainsi : $\begin{pmatrix} y_b \text{ est solution de} \\ (B_m) \text{ sur } \mathbb{R} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \Leftrightarrow \quad (\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_b''(x) - (m+1)y_b'(x) + my_b(x) = -x-1) \\ \Leftrightarrow \quad (\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2\alpha - (2\alpha x + \beta) = -x-1) \\ \Leftrightarrow \quad (\forall x \in \mathbb{R}, -2\alpha x + 2\alpha - \beta = -x-1) \end{array}$

Ainsi, par identification, (α, β) est solution du système $\begin{cases} -2\alpha = -1 \\ 2\alpha - \beta = -1 \end{cases}$ qui donne $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $\beta = 2$ et par suite la fonction $y_b : x \longrightarrow -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x$ est solution de (B_m) sur $\mathbb{R}$.

3. On en déduit alors l'ensemble des solutions de (E_m) :

Si $m \neq 0$ **et** $m \neq 1$ **:** les solutions de (E_m) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions : $x \longmapsto C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{mx} + x\mathrm{e}^{x} - \dfrac{1}{m}x - \dfrac{2m+1}{m^2}$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$

Si $m = 0$ **et** $m \neq 1$ **:** les solutions de (E_m) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions : $x \longmapsto C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{mx} + x\mathrm{e}^{x} - \dfrac{1}{2}x^2 + 2x$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$

Si $m \neq 0$ **et** $m = 1$ **:** les solutions de (E_m) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions : $x \longmapsto C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{mx} + \dfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{x} - \dfrac{1}{m}x - \dfrac{2m+1}{m^2}$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$

Si $m = 0$ **et** $m = 1$ **:** les solutions de (E_m) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions : $x \longmapsto C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{mx} + \dfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{x} - \dfrac{1}{2}x^2 + 2x$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$