Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 4116

Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 4116

Détermination du polynôme caractéristique χ_A de A : par définition du polynôme caractéristique, on a : $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_4 - A)$. Or ici, on a :

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \lambda-1 \\ \lambda-2 & -1 & -1 & -1 \\ \lambda-2 & \lambda-1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&\underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2}{=} \\
&= (\lambda-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} (\lambda-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{Dév. p/r } C_1}{=} (\lambda-2) \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{=} (\lambda-2) \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & \lambda-2 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-2)^2 \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\underset{C_2 \leftarrow C_2 + C_3}{=} (\lambda-2)^2 \begin{vmatrix} \lambda & 4 & 2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{Dév. p/r } L_3}{=} (\lambda-2)^2 \begin{vmatrix} \lambda & 4 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-2)^2 \left(\lambda^2 - 4\right) \\
&= (\lambda-2)^3 (\lambda+2)
\end{aligned}$$

Valeurs propres de A : par théorème on sait que : ($\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de A) $\Leftrightarrow$ ($\chi(\lambda) = 0$)

On en déduit donc que le spectre de A est : $^{(}A) = \{-2, 2\}$ où 2 est valeur propre de multiplicité 3 et -2 de multiplicité 1.

Détermination des sous-espaces propres : par définition si λ est une valeur propre de A, alors le sous-espace propre $E_\lambda(A)$ associé est $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda \mathrm{I}_4)$.

Détermination de $E_{-2}(A)$: en posant $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, il vient que :

$$\begin{aligned}(\,X\in E_{-2}(A)\,) &\Leftrightarrow (\,(A+2\mathrm{I}_4)\,X=(0)\,)\\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c}(x_1,x_2,x_3,x_4) \text{ est solution du système}\\ \text{de représentation matricielle}\\ (A+2\mathrm{I}_4|0)\end{array}\right)\end{aligned}$$

$$(A+2\mathrm{I}_4|0)\sim_L\left(\begin{array}{cccc|c}3&1&1&1&0\\1&3&-1&-1&0\\1&-1&3&-1&0\\1&-1&-1&3&0\end{array}\right)\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-\frac13L_1\\L_3\leftarrow L_3-\frac13L_1\\L_4\leftarrow L_4-\frac13L_1}}{\sim_L}\left(\begin{array}{cccc|c}3&1&1&1&0\\0&\frac83&-\frac43&-\frac43&0\\0&-\frac43&\frac83&-\frac43&0\\0&-\frac43&-\frac43&\frac83&0\end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3\leftarrow L_3+\frac12L_2\\L_4\leftarrow L_4+\frac12L_2}}{\sim_L}\left(\begin{array}{cccc|c}3&1&1&1&0\\0&\frac83&-\frac43&-\frac43&0\\0&0&2&-2&0\\0&0&-2&2&0\end{array}\right)\underset{L_4\leftarrow L_4+1L_3}{\sim_L}\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+\frac23L_3\\L_1\leftarrow L_1-\frac12L_3}}{\sim_L}\left(\begin{array}{cccc|c}3&1&0&2&0\\0&\frac83&0&-\frac83&0\\0&0&2&-2&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\underset{L_1\leftarrow L_1-\frac38L_2}{\sim_L}\left(\begin{array}{cccc|c}3&0&0&3&0\\0&\frac83&0&-\frac83&0\\0&0&2&-2&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\underset{\substack{L_1\leftarrow\frac13L_1\\L_2\leftarrow\frac38L_2\\L_3\leftarrow\frac12L_3}}{\sim_L}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&1&0\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

Ainsi on en déduit que : $$\begin{aligned}(\,X\in E_{-2}(A)\,) &\Leftrightarrow \begin{cases}x_1=x_4\\x_2=x_4\\x_3=x_4\\x_4=x_4\end{cases},\ x_4\in\mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow \left(X\in\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\right)\end{aligned}$$

et donc que $E_{-2}(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ et donc $E_{-2}(A)$ est une droite vectorielle.

Détermination de $E_2(A)$: en posant $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, il vient que :

$$\begin{aligned}(\,X\in E_{2}(A)\,) &\Leftrightarrow (\,(A-2\mathrm{I}_4)\,X=(0)\,)\\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c}(x_1,x_2,x_3,x_4) \text{ est solution du système}\\ \text{de représentation matricielle}\\ (A-2\mathrm{I}_4|0)\end{array}\right)\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}-1&1&1&1&0\\1&-1&-1&-1&0\\1&-1&-1&-1&0\\1&-1&-1&-1&0\end{array}\right)\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+1L_1\\L_3\leftarrow L_3+1L_1\\L_4\leftarrow L_4+1L_1}}{\sim_L}\left(\begin{array}{cccc|c}-1&1&1&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\underset{L_1\leftarrow -1L_1}{\sim_L}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&-1&-1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

Ainsi on en déduit que : $$\begin{aligned}(\,X\in E_{2}(A)\,) &\Leftrightarrow \begin{cases}x_1=x_2+x_3+x_4\\x_2=x_2\\x_3=x_3\\x_4=x_4\end{cases},\ (x_1,x_2,x_4)\in\mathbb{R}^3\\ &\Leftrightarrow \left(X\in\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\right)\end{aligned}$$

et donc que $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ étant immédiat que cette famille est libre, donc formant une base de $E_2(A)$.

Diagonalisation de la matrice A : des résultats précédents, on en déduit que :

- -2 est une valeur propre d'ordre de multiplicité 1 dont le sous-espace propre associée est de dimension 1 ;
- 2 est une valeur propre d'ordre de multiplicité 3 dont le sous-espace propre associée est de dimension 3 ;

Par théorème, la matrice A est donc diagonalisable.

Elle est donc semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ avec $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et $A = PDP^{-1}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4109

Soit $\varphi \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est donnée par : $A_\varphi = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice A_φ.
2. Quelles sont les valeurs propres de la matrice A_φ ? Quelle est la dimension de chaque sous-espace propres ? À quelle matrice diagonale D_φ la matrice A_φ est-elle semblable ?
3. Déterminer une base $\left(\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}, \overrightarrow{c_3}\right)$ de vecteurs propres de φ.
4. On pose $D_1 = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{c_1}\right)$. Justifier que D_1 est stable par φ.
5. On pose $P_1 = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{c_2}, \overrightarrow{c_3}\right)$. Montrer que P_1 est stable par φ.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 4109

1. Par définition du polynôme caractéristique, le polynôme caractéristique χ_φ de A_φ est $\chi_\varphi(\lambda) = \det\left(\lambda \mathrm{I}_3 - A_\varphi\right)$. On a directement ici que :

$$\begin{aligned}
\det\left(\lambda\mathrm{I}_3 - A\right) &= \begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 1\\ -1 & \lambda-1 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}\\
&\underset{L_1\leftarrow L_1+L_2}{=} \begin{vmatrix}\lambda-2 & \lambda-2 & 0\\ -1 & \lambda-1 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}\\
&= (\lambda-2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & \lambda-1 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}\\
&\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+L_1\\ L_3\leftarrow L_3+L_1}}{=} (\lambda-2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}\\
&= (\lambda-2)\times 1\times\lambda\times(\lambda-1)\\
&= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)
\end{aligned}$$

2. Par théorème on sait que : ($\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de A_φ) $\Leftrightarrow$ ($\chi(\lambda) = 0$)
   Ainsi, on en déduit que le spectre de A_φ est $\mathrm{sp}\left(A_\varphi\right) = \{0, 1, 2\}$.
   De plus chacune des valeurs propres étant d'ordre de multiplicité 1, par théorème, on sait que la dimension du sous-espace propre associé est donc de 1, c'est à dire que chacun d'entre eux est une droite vectorielle.
   Comme la matrice A_φ est une matrice de taille 3×3 et qu'elle possède 3 valeurs propres distinctes, par théorème elle est diagonalisable et est donc semblable à une matrice diagonale D_φ dont les termes diagonaux sont les trois

valeurs propres de A_φ.

3. Par définition si λ est une valeur propre de φ, alors le sous-espace propre $E_\lambda(\varphi)$ associé est $E_\lambda(\varphi) = \mathrm{Ker}\,(\varphi - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

De plus, on a : $\left(\begin{array}{c} \overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ est un vecteur} \\ \text{propre non nul associé} \\ \text{à la valeur propre } \lambda \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} X = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \text{est vecteur propre non nul} \\ \text{de la matrice } A_\varphi \end{array}\right)$

Recherche des vecteurs propres de la matrice A_φ associé à la valeur propre 0 : En posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, il vient que :

$$\begin{array}{rcl} (X \in E_0(A_\varphi)) & \Leftrightarrow & ((A_\varphi - 0\mathrm{I}_3)X = (0)) \\ & \Leftrightarrow & \left(\begin{array}{c} (x_1, x_2, x_3) \text{ est solution du système} \\ \text{de représentation matricielle} \\ (A|0) \end{array}\right) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ainsi on en déduit que : $$\begin{array}{rcl} (X \in E_0(A_\varphi)) & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & -x_2 \\ x_2 & = & x_2 \\ x_3 & = & 0 \end{array}\right. , x_2 \in \mathbb{R} \\ & \Leftrightarrow & \left(X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right) \end{array}$$

Recherche des vecteurs propres de la matrice A_φ associé à la valeur propre 1 : En posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, il vient que :

$$\begin{array}{rcl} (X \in E_0(A_\varphi)) & \Leftrightarrow & ((A_\varphi - 1\mathrm{I}_3)X = (0)) \\ & \Leftrightarrow & \left(\begin{array}{c} (x_1, x_2, x_3) \text{ est solution du système} \\ \text{de représentation matricielle} \\ (A - \mathrm{I}_3|0) \end{array}\right) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ainsi on en déduit que : $$\begin{array}{rcl} (X \in E_1(A_\varphi)) & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & -x_3 \\ x_2 & = & x_3 \\ x_3 & = & x_3 \end{array}\right. , x_3 \in \mathbb{R} \\ & \Leftrightarrow & \left(X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right) \end{array}$$

Recherche des vecteurs propres de la matrice A_φ associé à la valeur propre 2 : En posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, il vient que :

$$\begin{aligned} (X \in E_0(A_\varphi)) & \Leftrightarrow ((A_\varphi - 2\mathrm{I}_3)X = (0)) \\ & \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} (x_1, x_2, x_3) \text{ est solution du système} \\ \text{de représentation matricielle} \\ (A - 2\mathrm{I}_3 | 0) \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow -1L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ainsi on en déduit que : $$\begin{aligned} (X \in E_2(A_\varphi)) & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & x_3 \\ x_3 & = & x_3 \end{array} \right. , x_3 \in \mathbb{R} \\ & \Leftrightarrow \left(X \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right) \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

- Le vecteur $\overrightarrow{c_1} = (-1, 1, 0)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 0
- Le vecteur $\overrightarrow{c_2} = (-1, 1, 1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1
- Le vecteur $\overrightarrow{c_3} = (0, 1, 1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 2

Ces trois vecteurs sont des vecteurs propres non nuls associés à trois valeurs propres distinctes d'une matrice de taille 3×3.

Par théorème, ils forment donc une base de $\mathbb{R}^3$.

4. D_1 est une droite vectorielle engendrée par un vecteur propre. Par théorème, D_1 est stable par φ.

5. Soit $\overrightarrow{v} \in \operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{c_2}, \overrightarrow{c_3}\right)$. Montrons que $\varphi\left(\overrightarrow{v}\right) \in \operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{c_2}, \overrightarrow{c_3}\right)$.

Puisque $\overrightarrow{v} \in \operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{c_2}, \overrightarrow{c_3}\right)$, il existe $(\alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{v} = \alpha_2\overrightarrow{c_2} + \alpha_3\overrightarrow{c_3}$. Ainsi, par linéarité de φ, il vient que :
$$\varphi\left(\overrightarrow{v}\right) = \alpha_2\varphi\left(\overrightarrow{c_2}\right) + \alpha_3\varphi\left(\overrightarrow{c_3}\right)$$

Or d'après la question précédente $\operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{c_2}\right)$ et $\operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{c_3}\right)$ sont stables par φ, donc il existe $(\beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi\left(\overrightarrow{c_2}\right) = \beta_2\overrightarrow{c_2}$ et $f(\varphi)\overrightarrow{c_3}, = \beta_3\overrightarrow{c_3}$, ce qui permet d'écrire que $\varphi\left(\overrightarrow{v}\right) \in \operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{c_2}, \overrightarrow{c_3}\right)$.

Ainsi, $\varphi\left(\overrightarrow{v}\right) \in \operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{c_2}, \overrightarrow{c_3}\right)$ ce qui montre bien que $\operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{c_2}, \overrightarrow{c_3}\right)$ est stable par φ.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 4117

On considère l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 à coefficients réels. On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et que (A,B,C) est une base de $\mathcal{E}$.

2. Établir que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication, c'est à dire que : $\forall (M,N) \in \mathcal{E}, \quad M \times N \in \mathcal{E}$.

3. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, si M est inversible, alors $M^{-1} \in \mathcal{E}$.

4. On définir alors l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ M & \longmapsto & TMT \end{array} \right.$.

a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

b. Vérifier que T est inversible et démontrer alors que f est un automorphisme de E.

c. Est-ce que la matrice T est diagonalisable ?

d. On note F la matrice de f dans la base (A,B,C) de $\mathcal{E}$.

i. Montrer que f admet une valeur propre et une seulle et déterminer celle-ci.

ii. f est-elle diagonalisable ?

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 4117

1. Il est immédiat que $\mathcal{E} = \mathrm{Vect}\,(A,B,C)$ et ainsi $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
La famille (A,B,C) étant une sous-famille de la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui est elle-même libre, est donc libre.
Par suite (A,B,C) est une famille libre et génératrice de $\mathcal{E}$. Elle en forme donc une base.

2. Soient $(M,N) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ en écrivant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}$.

Un calcul direct donne que $M \times N = \begin{pmatrix} aa' & ab' + bc' \\ 0 & cc' \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$ et donc que $\mathcal{E}$ est stable par produit.

3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$ inversible. Son inverse M^{-1} est donc : $M^{-1} = \dfrac{1}{ac}\begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et on a directement que $M^{-1} \in \mathcal{E}$.

4. **a.** Soient $(M_1, M_2) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $M_3 = \lambda M_1 + M_2$.
Il vient alors que :
$$\begin{array}{rcl} f(M_3) & = & TM_3T \\ & = & T(\lambda M_1 + M_2)T \\ & = & (\lambda TM_1 + TM_2)T \\ & = & \lambda TM_1T + TM_2T \\ & = & \lambda f(M_1) + f(M_2) \end{array}$$
et ainsi, f est linéaire.
De plus, comme par définition $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, f est donc un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

b. T étant une matrice triangulaire supérieure dont tous les termes diagonaux sont non nuls, elle est inversible.
f étant un endomorphisme d'un espace $\mathcal{E}$ de dimension finie égale à 3 d'après la première question, par le théorème de caractérisation des endomorphismes bijectifs, f sera bijectif, si, et seulement si, f est injectif, c'est à dire si son noyau est réduit au vecteur nul de $\mathcal{E}$, en l'occurrence la matrice nulle.
Soit alors $M \in \mathrm{Ker}\,(f)$. Alors $TMT = (0)$. Comme T est inversible, on en déduit en multipliant par T^{-1} à gauche que $MT = (0)$ puis par T^{-1} à droite que $M = (0)$. Ainsi, le noyau de f est réduit au vecteur nul.
f est donc injectif, et par théorème, f est alors bijectif.

c. La matrice T étant triangulaire supérieure, ses coefficients diagonaux sont exactement ses valeurs propres. Ainsi, T ne possède qu'une valeur propre, qui est 1. Elle ne peut être alors diagonalisable, car sinon, T serait semblable à la matrice $1 \times \mathrm{I}_2$, et donc égale à la matrice identité, ce qui n'est clairement pas le cas.

d. **i.** On a directement que $f(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc que $f(A) = A + B)$, $f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc que $f(B) = B$ et $f(C) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c'est à dire $f(C) = B + C$.

On en déduit donc que la matrice F de f dans la base (A,B,C) de $\mathcal{E}$ est alors : $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique de F est par définition $\chi_\lambda(F) = \det(\lambda \mathrm{I}_3 - F)$.

Or ici, on a directement que : $\chi_\lambda(F) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \underset{\text{Dév. p/r } L_1}{=} (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^3$

Par suite, F ne possède qu'une seule valeur propre qui est 1 d'ordre de multiplicité 3, ce qui est le cas aussi pour f.

ii. La valeur propre 1 étant d'ordre de multiplicité 3, si la matrice F était diagonalisable elle serait donc semblable à la matrice identité d'ordre 3, et donc compte-tenu de la définition des matrices semblables, elle serait égale à la matrice identité d'ordre 3. Ce qui n'est pas le cas. Ainsi, la matrice F n'est pas diagonalisable, et par suite, f non plus.

EX. 4 | Réf. 4199

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour $\theta \neq 0 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\Delta_n(\theta) = \det\left(A + (2\cos(\theta)\mathrm{I}_n)\right)$.

1. Calculer $\Delta_1(\theta)$ et $\Delta_2(\theta)$.

2. Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, on a : $\Delta_n(\theta) = 2\cos(\theta)\Delta_{n-1}(\theta) - \Delta_{n-2}(\theta)$.

3. Montrer par récurrence que : $\forall n \geq 1, \quad \Delta_n(\theta) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.

4. Donner alors les valeurs propres de A.

EX. 4 | Éléments de correction | Réf. 4199

1. Calcul de $\Delta_1(\theta)$: par définition de A, il vient que : $\Delta_1(\theta) = \begin{vmatrix} 2\cos(\theta) \end{vmatrix} = 2\cos(\theta)$

Calcul de $\Delta_2(\theta)$: par définition de A, il vient que : $\Delta_2(\theta) = \begin{vmatrix} 2\cos(\theta) & 1 \\ 1 & 2\cos(\theta) \end{vmatrix} = 4\cos^2(\theta) - 1$

2. Soit $n \geq 3$. En posant $\alpha = 2\cos(\theta)$, un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned}
\Delta_n(\theta) &= \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & \alpha \end{vmatrix}_{n\times n} \\
&\underset{\text{Dév. p/r } C_1}{=} \alpha \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \alpha & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & \alpha \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} + (-1)^{1+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & \alpha \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} \\
&\underset{\text{Dév. p/r } L_1}{=} \alpha\Delta_{n-1}(\theta) - (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)} \\
&= \alpha\Delta_{n-1}(\theta) - \Delta_{n-2}(\theta)
\end{aligned}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $\Delta_n(\theta) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$ ».

Montrons par récurrence double sur l'entier n que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Initialisation : on sait que $\Delta_1(\theta) = 2\cos(\theta)$.

Or $\dfrac{\sin((1+1)\theta)}{\sin(\theta)} = \dfrac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta)}$. Comme $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$, on en déduit que $\Delta_1(\theta) = \dfrac{\sin((1+1)\theta)}{\sin(\theta)}$ ce qui est bien $\mathcal{P}(1)$.

De même, $\Delta_2(\theta) = 4\cos^2(\theta) - 1$.

Or :
$$\begin{aligned}
\frac{\sin((2+1)\theta)}{\sin(\theta)} &= \frac{\sin(3\theta)}{\sin(\theta)} \\
&= \frac{\sin(2\theta) + \theta)}{\sin(\theta)} \\
&= \frac{\sin(2\theta)\cos(\theta) + \cos(2\theta)\sin(\theta)}{\sin(\theta)} \\
&= \frac{2\sin(\theta)\cos^2(\theta) + \cos(2\theta)\sin(\theta)}{\sin(\theta)} \\
&= 2\cos^2(\theta) + \cos(2\theta) \\
&= 2\cos^2(\theta) + 2\cos^2(\theta) - 1 \\
&= 4\cos^(\theta) - 1
\end{aligned}$$

Ce qui est bien $\mathcal{P}(2)$.

Hérédité : Soit $n \geq 3$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n-2)$ et montrons, sous cette hyptohèse que l'on a $\mathcal{P}(n)$.

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\Delta_n(\theta) &= 2\cos(\theta)\Delta_{n-1}(\theta) - \Delta_{n-2}(\theta) \\
&\underset{\text{Hyp.Rec.}}{=} 2\cos(\theta)\frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} - \frac{\sin((n-1)\theta)}{\sin(\theta)} \\
&= \frac{1}{\sin(\theta)}\left(2\cos(\theta)\sin(n\theta) - \sin((n-1)\theta)\right) \\
&= \frac{1}{\sin(\theta)}\left(\sin(n\theta + \theta) + \sin(n\theta - \theta) - \sin((n-1)\theta)\right) \\
&= \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}
\end{aligned}$$

ce qui est bien $\mathcal{P}(n)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie aux rangs 1 et 2, et héréditaire, d'après le principe de récurrence double, la proposition $\mathbb{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

4. A possède au plus n valeurs propres puisqu'appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Les valeurs propres λ sont par ailleurs les racines du polynôme caractéristique de A qui est $\det(\lambda \mathrm{I}_n - A) = (-1)^n \det(A - \lambda \mathrm{I}_n)$.
En écrivant $\Delta_n(\theta) = \det(A - (-2\cos(\theta))\,\mathrm{I}_n)$, toutes les valeurs de θ qui annulent $\Delta_n(\theta)$ donnent donc une valeur propre de A.
On ne peut avoir $\theta = 0$. Pour tout $1 \leq k \leq n$, $\Delta_n\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right) = 0$.
Ainsi, le spectre de A est : $\mathrm{sp}(A) = \left\{-2\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right),\, 1 \leq k \leq n\right\}$.