Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 4060

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par $\Delta_n(x)$ le déterminant de taille $n \times n$ suivant :

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \dots & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -x & 1+x^2 & -x \\ 0 & \dots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

1. Calculer $\Delta_1(x)$, $\Delta_2(x)$ et $\Delta_3(x)$.
2. Montrer à l'aide d'un développement suivant une ligne puis suivant une colonne que pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\Delta_n(x) = \left(1+x^2\right)\Delta_{n-1}(x) - x^2\Delta_{n-2}(x)$$

3. À l'aide des expressions de $\Delta_1(x)$, $\Delta_2(x)$ et $\Delta_3(x)$, conjecturer une expression pour $\Delta_n(x)$ et la démontrer par récurrence.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4061

Pour $n \geq 2$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$, on pose :

$$V_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

On considère le polynôme P_n où :
$$\begin{aligned} P_n(X) &= \prod_{i=1}^{n-1}(X-\alpha_i) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \text{ avec } (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n \end{aligned}$$

1. Donner une condition sur $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ pour que $V_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ soit nul.
2. Expliciter le coefficient a_{n-1}.
3. Calculer $V_2(\alpha_1, \alpha_2)$ et $V_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ en donnant le résultat sous forme factorisée.
4. Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, on a : $V_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = P_n(\alpha_n) \times V_{n-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$.
5. Montrer par récurrence sur l'entier n que : $\forall n \geq 2, \quad V_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n}(\alpha_j - \alpha_i)$.
6. Soit alors $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Calculer en donnant le résultat sous forme factorisée, le déterminant suivant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) \\ \cos(2a) & \cos(2b) & \cos(2c) \end{vmatrix}$$

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 1528

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe un entier naturel p tel que $A^p = 0$. On appelle indice de nilpotence de A le plus petit entier p tel que $A^p = 0$.

1. Soit A une matrice nilpotente d'indice $p > 0$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

- **a.** Montrer qu'il existe un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$.
- **b.** Montrer que la famille $\big(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x)\big)$ est libre.
- **c.** Que peut-on dire pour l'indice de A ? Préciser A^n.

2. Soit A et B deux matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent.

- **a.** Montrer que la matrice $A + B$ est nilpotente.
- **b.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(A + xB)^n = 0$.
  En déduire que si p et q sont deux entiers naturels tels que $p + q \geq n$, alors $A^pB^q = 0$.

3. Soit A une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on définit la matrice exponentielle de A par :

$$\exp(A) = \mathrm{I}_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}A^{n-1}$$

- **a.** Montrer que si A et B sont deux matrices nilpotentes qui commutent : $\exp(A + B) = \exp(A) \times \exp(B)$.
- **b.** En déduire que l'exponentielle d'une matrice nilpotente est inversible et préciser son inverse.
- **c.** Déterminer l'ensemble des matrices nilpotentes A telles que $\exp(A) = \mathrm{I}_n$.

4. On considère les polynômes $P = 1 + X + \dfrac{X^2}{2!} + \ldots + \dfrac{X^{n-1}}{(n-1)!}$ et $Q = X - \dfrac{X^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{X^{n-1}}{(n-1)!}$.

- **a.** En remarquant que P et Q sont les développements limités à l'ordre $n-1$ de deux fonctions numériques très simples, démontrer que le polynômes $P(Q(X)) - (1 + X)$ est divisible par X^n.
- **b.** En déduire que pour tout matrice A nilpotente de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\exp(Q(A)) = \mathrm{I}_n + A \qquad \text{et} \qquad Q(\exp(A) - \mathrm{I}_n) = A$$

5. Montrer que l'application $A \longmapsto \exp(A)$ est une bijection de l'nesemble des matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans un ensemble que l'on précisera.