Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 0198

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$(E) : \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$$

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 0198

- Tout exprimer avec des cosinus ou des sinus...
- et se ramener à une équation du type $\cos(X) = cos(\theta)$ ou $\sin(X) = \sin(\theta)$ où X est une expression qui dépend de x à l'aide des formules de trigonométries...

EX. 2 | Réf. 2787

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad \cos^4(x)+\sin^4(x) = 1-\frac{1}{2}\sin^2(2x)$

puis que : $$\cos^4(x)+\cos^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos^4\left(x+\frac{2\pi}{4}\right)+\cos^4\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{3}{2}$$

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2787

- Utiliser les formules $\cos^2(x) = \dfrac{\cos 2x+1}{2}$ et $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, puis élever au carré.
- Se ramener à l'expression précédente en transformant les sinus en cosinus.

EX. 3 | Réf. 2820

1. À l'aide des formules de duplication, montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.
2. En déduire les valeurs de $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)$.
3. Combient vaut alors $\quad \left(\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2+\left(\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)^2+\left(\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)\right)^2+\left(\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right)^2$?

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2820

1. Utiliser les formules de duplication en remarquant que $\frac{\pi}{4} = 2\times\frac{\pi}{8}$.
2. Remarquer par exemple que $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$.
3. Il suffit de réinvestir les résultats de la question précédente.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 4 | Réf. 2819

1. Soit $f : \begin{array}{|lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(2x)\cos(3x) \end{array}$.

   a. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\sin(5x) - \sin(x)\right)$.

   b. En déduire les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.

   c. Déterminer alors la primitive $\mathbb{F}$ de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $\mathbb{F}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$.

2. Soit $g : \begin{array}{|lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (\cos(x))^4 \end{array}$.

   a. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{2}\cos(2x) + \dfrac{1}{8}\cos(4x)$.

   b. En déduire les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction g.

   c. Déterminer alors la primitive $\mathbb{G}$ de g sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $\mathbb{G}\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 1$.

EX. 4 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2819

1. a. Il suffit d'utiliser les bonnes formules de trigonométrie...

   b. La primitivation de chaque terme ne pose pas de difficulté particulière.

   c. On détermine alors la constante de primitivation en évaluant la primitive au point donné.

2. a. Il suffit d'utiliser les bonnes formules de trigonométrie et de penser que $a^4 = \left(a^2\right)^2$...

   b. La primitivation de chaque terme ne pose pas de difficulté particulière.

   c. On détermine alors la constante de primitivation en évaluant la primitive au point donné.