Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 0359

Résoudre sur $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy suivant : $(\star)$: $\begin{cases} x' + \dfrac{t}{t^2+1}x = \dfrac{1}{1+t^2} \\ x(0) = 0 \end{cases}$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 0359

On mettra en oeuvre le plan de résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

- Résolution de l'équation homogène associée ;
- Recherche d'une solution particulière. On pourra utiliser la méthode de variations de la constante, et déterminer la dérivée de la fonction $t \longmapsto \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)$.
- Mise en forme des solutions générales ;
- Réponse au problème de Cauchy.

EX. 2 | Réf. 0694

On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$(\star_1) : (1+t)x'' - 2x' + (1-t)x = t\mathrm{e}^{\,t} \text{ et } (\star_2) : (1+t)x' + 2tx = t$$

1. Montrer que la fonction $x_2 : t \longmapsto \dfrac{1}{2}$ est solution de $(\star_2)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation $(\star_2)$ sur $]-1;+\infty[$.
3. Montrer que : $\left(\begin{array}{c} x : t \longmapsto x(t) \text{ est} \\ \text{solution de } (\star_1) \\ \text{sur }]-1;+\infty[\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \text{La fonction } z' : t \longmapsto z'(t) \\ \text{où } z : t \longmapsto x(t)\mathrm{e}^{\,-t} \\ \text{est solution sur }]-1;+\infty[\text{ de } (\star_2) \end{array}\right)$
4. Calculer $f'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ où $f : t \longmapsto \left(2t^2 + 6t + 5\right)\mathrm{e}^{\,-2t}$.
5. En déduire les solutions de $(\star_1)$ sur $]-1;+\infty[$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 0694

1. Il suffit de s'assurer que la fonction proposée vérifie bien la relation $(\star_2)$.
2. $(\star_2)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 que l'on résoudra sur l'intervalle proposé en mettant en oeuvre le plan de résolution d'une telle équation : équation homogène, solution particulière, mise en forme des solutions.
3. On exprimera au préalable $x'(t)$ en fonction de $z'(t)$ que l'on reportera ensuite dans $(\star_1)$.
4. On remarquera qu'il s'agit de dériver un produit de deux fonctions.
5. Connaissant l'expression de z', on connaît celle de z puis celle de x.

EX. 3 | Réf. 0694

Préparation à l'oral

EX. 4 | Réf. 0358

On considère le système différentiel $(\star)$: $\begin{cases} x_1' + 4x_2 = 2\mathrm{e}^{2t} \\ x_2' - x_1 = \mathrm{e}^{2t} \end{cases}$

1. Former une équation différentielle $(\diamond)$ du second ordre à coefficients constants satisfaite par la seule fonction x_1.
2. Résoudre l'équation $(\diamond)$.
3. En déduire le couple de fonctions (x_1, x_2) solution de $(\star)$ qui vérifie $\begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = -1 \end{cases}$.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 0358

EX. 5 | Réf. 0358

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 6 | Réf. 0697

On considère l'équation différentielle $(\star)$: $x' = \mathrm{e}^{x+t}$ de fonction inconnue $x : t \longmapsto x(t)$.

1. On suppose dans cette question que $x : t \longmapsto x(t)$ est solution de $(\star)$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
   - **a.** Montrer qu'il existe un réel $c \in \mathbb{R}$ tel que la fonction x est de la forme $x : t \longmapsto -\ln(c - \mathrm{e}^{t})$.
   - **b.** En déduire la forme de I, puis l'ensemble des solutions de $(\star)$.
2. Déterminer la solution de $(\star)$ qui vérifie $x(0) = 0$.

EX. 4 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 0697

1. **a.** On remarquera que $x'(t)\mathrm{e}^{-x(t)} = \mathrm{e}^{t}$, ce qui donnera la forme proposée pour x.
   b. Il y a cependant une contrainte dans l'expression proposée pour x...
2. Il suffit donc d'identifier la constante c à l'aide de la condition initiale proposée.

EX. 7 | Réf. 0697

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 8 | Réf. 3736

On se propose dans cet exercice de résoudre l'équation différentielle non linéaire $(\star)$ suivante :

$$(\star) : \qquad yy' = xy^2 + 1$$

1. Montrer que la fonction z définie par $z(x) = (y(x))^2$ vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre (E) que l'on résoudra sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire les solutions de l'équation $(\star)$.

EX. 5 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3736