Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 4060

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par $\Delta_n(x)$ le déterminant de taille $n \times n$ suivant :

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \dots & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -x & 1+x^2 & -x \\ 0 & \dots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

1. Calculer $\Delta_1(x)$, $\Delta_2(x)$ et $\Delta_3(x)$.
2. Montrer à l'aide d'un développement suivant une ligne puis suivant une colonne que pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\Delta_n(x) = \left(1+x^2\right)\Delta_{n-1}(x) - x^2\Delta_{n-2}(x)$$

3. À l'aide des expressions de $\Delta_1(x)$, $\Delta_2(x)$ et $\Delta_3(x)$, conjecturer une expression pour $\Delta_n(x)$ et la démontrer par récurrence.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4060

1. Sarrus est assez efficace ici pour avoir la réponse rapidement pour $\Delta_3(x)$.
2. On développe suivant la première ligne, puis suivant la première colonne du déterminant restant. Il est vivement conseillé d'écrire explicitement les déterminants manipulés pour $n = 5$ ou 6 pour voir ce qui se passe, puis repasser en taille $n \times n$.
3. On conjecture assez rapidement que $\Delta_n(x) = 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n}$ que l'on montre alors par récurrence en utilisant la relation trouvée précédemment.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4061

Pour $n \geq 2$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$, on pose :

$$V_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

On considère le polynôme P_n où : $$P_n(X) = \prod_{i=1}^{n-1}(X-\alpha_i) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \text{ avec } (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$$

1. Donner une condition sur $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ pour que $V_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ soit nul.
2. Expliciter le coefficient a_{n-1}.

3. Calculer $V_2(\alpha_1, \alpha_2)$ et $V_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ en donnant le résultat sous forme factorisée.
4. Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, on a : $V_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = P_n(\alpha_n) \times V_{n-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$.
5. Montrer par récurrence sur l'entier n que : $\forall n \geq 2, \quad V_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$.
6. Soit alors $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Calculer en donnant le résultat sous forme factorisée, le déterminant suivant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) \\ \cos(2a) & \cos(2b) & \cos(2c) \end{vmatrix}$$

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4061

1. On dispose d'une expression factorisée de P_n et d'une expression développée...Une rapide identification donne la réponse.
2. On essaie de faire au mieux pour $V_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ avec quelques opérations avant de développer.
3. On effectue $C_n \leftarrow \sum_{i=1}^{n} a_{i-1} C_i$ en justifiant qu'elle ne modifie par le déterminant et on fait alors le lien avec P_n.
4. C'est un récurrence. On s'attache à sa rédaction.
5. La forme $\cos(2a)$ nous fait dire qu'il va y avoir un $\cos^2(a)$ quelque part et que l'on va pouvoir utiliser le résultat sur le déterminant de Van Der Monde.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 1528

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe un entier naturel p tel que $A^p = 0$. On appelle indice de nilpotence de A le plus petit entier p tel que $A^p = 0$.

1. Soit A une matrice nilpotente d'indice $p > 0$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.
   - **a.** Montrer qu'il existe un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$.
   - **b.** Montrer que la famille $\big(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x)\big)$ est libre.
   - **c.** Que peut-on dire pour l'indice de A ? Préciser A^n.
2. Soit A et B deux matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent.
   - **a.** Montrer que la matrice $A + B$ est nilpotente.
   - **b.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(A + xB)^n = 0$.
     En déduire que si p et q sont deux entiers naturels tels que $p + q \geq n$, alors $A^p B^q = 0$.
3. Soit A une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on définit la matrice exponentielle de A par :

$$\exp(A) = \mathrm{I}_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}A^{n-1}$$

   - **a.** Montrer que si A et B sont deux matrices nilpotentes qui commutent : $\exp(A + B) = \exp(A) \times \exp(B)$.
   - **b.** En déduire que l'exponentielle d'une matrice nilpotente est inversible et préciser son inverse.
   - **c.** Déterminer l'ensemble des matrices nilpotentes A telles que $\exp(A) = \mathrm{I}_n$.
4. On considère les polynômes $P = 1 + X + \dfrac{X^2}{2!} + \ldots + \dfrac{X^{n-1}}{(n-1)!}$ et $Q = X - \dfrac{X^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{X^{n-1}}{(n-1)!}$.
   - **a.** En remarquant que P et Q sont les développements limités à l'ordre $n - 1$ de deux fonctions numériques très simples, démontrer que le polynômes $P(Q(X)) - (1 + X)$ est divisible par X^n.
   - **b.** En déduire que pour tout matrice A nilpotente de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\exp(Q(A)) = \mathrm{I}_n + A \qquad \text{et} \qquad Q(\exp(A) - \mathrm{I}_n) = A$$

5. Montrer que l'application $A \longmapsto \exp(A)$ est une bijection de l'nesemble des matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans un ensemble que l'on précisera.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1528

1. **a.** Traduire le fait que f^{p-1} n'est pas nul.
   b. Partir d'une combinaison linéaire nulle et composer par f^{p-1}.
   c. Se demander qu'elle est la taille maximale d'une famille libre en dimension finie n.
2. **a.** Utiliser la formule du binôme en remarquant que les puissances de A sont nulles à partir d'un moment.
   b. On reprend quasiment le même calcul.
3. **a.** On écrit le produit des deux exponentielles de matrices en utilisant les calculs précédents.
   b. Intuiter le résultat et le vérifier.
   c. Montrer que seules les matrices nilpotentes d'ordre de nilpotence égal à 1 conviennent.
4. **a.** Remarquer que $1+x = \mathrm{e}^{\ln(1+x)}$ puis interpréter l'ordre du développement limité pour conclure quant à une factorisation.
   b. On applique le résultat précédent.
5. L'application n'est pas linéaire...il faut revenir à la définition d'une bijection.