À noter & À garder en tête

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout.
Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

Exercice| [4018] | 1| Étude d'un projecteur

Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_3)$ est $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Montrer que f est un projecteur de $\mathbb{R}^3$ et identifier ses éléments caractéristiques.

Pistes de réflexion

- On commence par s'assurer que f est bien un projecteur en vérifiant que sa représentation matricielle A satisfait à la relation $A^2 = A$.
- Puis on cherche les invariants par f et le noyau de f pour en déterminer ses éléments caractéristiques.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [4240] | 2| Convergence d'une intégrale impropre

L'objet de cet exercice consiste en l'étude de la convergence et du calcul de l'intégrale impropre $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$.

(1). Montrer que l'intégrale I est convergente.

(2). Montrer que l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}\,\mathrm{d}x$ est convergente et calculer sa valeur.

(3). On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

À l'aide d'une intégration par parties que $I = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\left(x^2+1\right)}\,\mathrm{d}x$ et en déduire la valeur de I àl'aide du changement de variable $u = \sqrt{x}$.

Pistes de réflexion

(1). Il y a deux bornes impropres à gérer, l'une avec le théorème d'équivalence, et l'autre avec le théorème d'encadrement.

(2). Utiliser la forme canonique d'un polynôme de degré 2 puis deux changements de variables très simples pour retomber sur une $\arctan$

(3). On fait une intégration par parties sur un intervalle de la forme $[a; b]$, mais il faut ensuite gérer les deux bornes impropres pour retomber sur l'intégrale proposée. Faire ensuite le changement de variable pour obtenir l'intégrale dont on admet la valeur.