À noter & À garder en tête

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout.
Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

Exercice| [0664] | 1| Recherche d'équivalent

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{k}{n^2}} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

(1). Donner la limite de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ et en déduire celle de $(u_n)_{n\geq 1}$.

(2). En étudiant ensuite $v_n - u_n$, montrer que l'on a $u_n \sim v_n$ et en déduire que $u_n \sim \ln n$.

Pistes de réflexion

(1). On pourra commencer par calculer une expression du terme général v_n de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ en remarquant que ce dernier est défini comme une suite téléscopique.
La limite de $(u_n)_{n\geq 1}$ s'obtient avec le théorème d'encadrement après avoir établi que $u_n > v_n$.

(2). On remarquera que l'on peut factoriser le terme général de la somme définissant la différence $u_n - v_n$ pour utiliser ensuite la majoration $0 < \mathrm{e}^{\frac{k}{n^2}} - 1 < \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1$ pour obtenir un encadrement de $u_n - v_n$ qui donnera l'équivalent recherché ensuite.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [3324] | 2| Suites imbriquées

On considère les trois suites $(u_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ définies par les relations :

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n + w_n}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n + 2w_n}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, w_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n + 3w_n}{6} \end{cases}$$

(1). Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n < v_n < w_n$.

(2).(a). Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

(b). Montrer que la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

(c). Justifier que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est majorée par w_1 et que la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ est minorée par u_1.

(d). Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 4u_{n+1} - 6w_{n+1} = -2w_n$.
En conclure que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ sont convergentes vers la même limite ℓ.

(3). Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. On définit alors la suite $(t_n)_{n\geq 1}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad t_n = \alpha u_n + \beta v_n + \gamma w_n$$

(a). Montrer que la suite $(t_n)_{n\geq 1}$ est constante si, et seulement si, $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ est solution du système $(\mathcal{S})$ suivant :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} -9\alpha+3\beta+2\gamma=0 \\ 6\alpha-9\beta+4\gamma=0 \\ 3\alpha+6\beta-6\gamma=0 \end{cases}$$

(b). Déterminer alors une solution non triviale du système $(\mathcal{S})$.

(4). Justifier que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ convergent vers la même limite ℓ, puis en déduire la valeur de cette limite commune.

Pistes de réflexion

(1). Mettre en place correctement son raisonnement par récurrence. Pour l'hérédité, il s'agira d'utiliser l'hypothèse de récurrence à bon escient car il s'agit ici d'obtenir des comparaisons entre les termes de plusieurs suites. Peut-être sera-t-il judicieux de chercher le signe de la différence $v_{n+1}-u_{n+1}$ (et de même pour les autres) en exploitant l'hypothèse de récurrence.

(2).(a). On étudie le signe de $u_{n+1}-u_n$ et il faudra sûrement se servir du résultat précédent...

(b). Même indication.

(c). S'inspirer d'une démonstration sur les suites adjacentes...

(d). RAS pour l'égalité. Conclure en prenant la limite dans cette inégalité en ayant au préalable utilisé le théorème de la limite monotone.

(3).(a). $(t_n)_{n\geq 1}$ est constante si, et seulement, si pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $t_{n+1}=t_n$. Reste alors à procéder à une « identification » pour déterminer les relations que doivent satisfaire le triplet (α,β,γ).

(b). Résoudre le système demandé...

(4). Un théorème d'encadrement puis une utilisation de la suite $(t_n)_{n\geq 1}$ dans le cas où elle est constante permettra de déterminer cette limite commune.