Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 0198

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$(E) : \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$$

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 0198

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 0198

On sait que $\sin(x) = -\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$. Par suite :

$$\begin{aligned}
\cos\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2x-\tfrac{\pi}{3}\right)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \quad \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+\dfrac{\pi}{4}=2x+\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \\ \text{ou} \\ x+\dfrac{\pi}{4}=-2x-\dfrac{\pi}{6}+2k'\pi \end{cases} \quad \text{où } (k,k')\in\mathbb{Z}^2\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{12}+2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x=-\dfrac{5\pi}{12}+2k'\pi \end{cases} \quad \text{où } (k,k')\in\mathbb{Z}^2\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{12}+2k\pi \\ \text{ou} \\ x=-\dfrac{5\pi}{36}+\dfrac{2k'\pi}{3} \end{cases} \quad \text{où } (k,k')\in\mathbb{Z}^2
\end{aligned}$$

EX. 2 | Réf. 2787

Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\cos^4(x)+\sin^4(x)=1-\dfrac{1}{2}\sin^2(2x)$

puis que : $\cos^4(x)+\cos^4\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos^4\left(x+\dfrac{2\pi}{4}\right)+\cos^4\left(x+\dfrac{3\pi}{4}\right)=\dfrac{3}{2}$

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 2787

On utilise $\cos^2(x)=\dfrac{\cos 2x+1}{2}$ et $\sin^2(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$ pour obtenir que $\cos^4(x)=\dfrac{1+\cos^2(2x)+2\cos 2x}{4}$ ainsi que : $\sin^4(x)=\dfrac{1+\cos^2(2x)-2\cos 2x}{4}$ d'où le premier résultat.

Ensuite, $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin x$ d'où en transformant $\cos^4\left(x+\dfrac{2\pi}{4}\right)=\sin^4(x)$ et $\cos^4\left(x+\dfrac{3\pi}{4}\right)=\sin^4\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ on en déduit :

$$S=1-\frac{\sin^2(2x)}{2}+1-\frac{\sin^2\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)}{2}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

EX. 3 | Réf. 2820

1. À l'aide des formules de duplication, montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

2. En déduire les valeurs de $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)$.

3. Combient vaut alors $\left(\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right)^2$?

EX. 4 | Éléments de correction | Réf. 2820

1. En remarquant que $\frac{\pi}{8} = 2 \times \frac{\pi}{4}$, il vient que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - 2\left(\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

On en déduit donc puisque $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \geq 0$ que $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$ et $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$.

2. On obient directement que :

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) &= \sin\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) \\ &= \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) &= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{aligned}$$

3. On obtient alors directement que $\left(\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right)^2 = 2$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 4 | Réf. 2819

1. Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(2x)\cos(3x) \end{array} \right.$.

a. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}(\sin(5x) - \sin(x))$.

b. En déduire les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.

c. Déterminer alors la primitive $\mathbb{F}$ de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $\mathbb{F}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$.

2. Soit $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (\cos(x))^4 \end{array} \right.$.

a. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x)$.

b. En déduire les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction g.

c. Déterminer alors la primitive $\mathbb{G}$ de g sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $\mathbb{G}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$.

EX. 5 | Éléments de correction | Réf. 2819

1. a. On a directement que : $\forall x \in \mathbb{R},$

$$\begin{aligned} \sin(5x) - \sin(x) &= 2\cos\left(\frac{5x+x}{2}\right)\sin\left(\frac{5x-x}{2}\right) \\ &= 2\cos(3x)\sin(2x) \end{aligned}$$

d'où : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}(\sin(5x) - \sin(x))}$.

b. Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions $\boxed{x \longmapsto \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\cos(5x)+\cos(x)\right)+c}$ où $c \in \mathbb{R}$.

c. La primitive $\mathbb{F}$ de f sur $\mathbb{R}$ cherchée est donc telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{F}(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\cos(5x)+\cos(x)\right)+c$ où $c \in \mathbb{R}$ est tel que $\mathbb{F}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Or on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)+c \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+c \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{10}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+c \\
&= \frac{1}{2}\times\frac{6\sqrt{2}}{10}+c \\
&= \frac{3\sqrt{2}}{10}+c
\end{aligned}$$

et ainsi $c = -\frac{3\sqrt{2}}{10}+1$ et finalement : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{F}(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\cos(5x)+\cos(x)\right)-\frac{3\sqrt{2}}{10}+1}$.

2. a. On a directement que : $\forall x \in \mathbb{R},$

$$\begin{aligned}
(\cos(x))^4 &= \left((\cos(x))^2\right)^2 \\
&= \left(\frac{\cos(2x)+1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}(\cos(2x)+1)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left((\cos(2x))^2+2\cos(2x)+1\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\cos(4x)+1}{2}+2\cos(2x)+1\right) \\
&= \frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}
\end{aligned}$$

b. On en déduit que les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction g sont les fonctions $\boxed{x \longmapsto \frac{1}{32}\sin(4x)+\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{3}{8}x+c}$ où $c \in \mathbb{R}$.

c. La primitive $\mathbb{G}$ de g sur $\mathbb{R}$ cherchée est donc telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{G}(x) = \frac{1}{32}\sin(4x)+\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{3}{8}x+c$ où $c \in \mathbb{R}$ est tel que $\mathbb{G}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$.

Or on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{32}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{3\pi}{24}+c \\
&= \frac{1}{32}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3\pi}{24}+c \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{64}+\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi}{8}+c \\
&= \frac{7\sqrt{3}}{64}+\frac{\pi}{8}+c
\end{aligned}$$

et ainsi $c = -\frac{7\sqrt{3}}{64}+\frac{3\pi}{24}$ et finalement : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{G}(x) = \frac{1}{32}\sin(4x)+\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{3}{8}x-\frac{7\sqrt{3}}{64}+\frac{\pi}{8}}$.