Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le résultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs...La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 0144

Déterminer si elle existe la limite en $+\infty$ de $f(x)$ où : $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 0144

Il s'agit clairement d'une forme indéterminée du type « $\infty-\infty$ ».

Pour tout $x>0$, on a :
$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}\\
&= \frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}\\
&= \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}\\
&= \frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{\sqrt{x}}{x}}}{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}+\sqrt{x}}\\
&= \frac{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x}}{x}}}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}+1}
\end{aligned}$$

Il est clair que $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{\sqrt{x}}{x}}=1$. Par ailleurs, pour tout $x>0$: $\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}=\frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{\sqrt{x}}{x}}}{x}=\frac{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x}}{x}}}{\sqrt{x}}$ et comme $\sqrt{1+\frac{\sqrt{x}}{x}}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1$, il vient $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}=0$ et par suite $\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}+1\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}2$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{2}$.

EX. 2 | Réf. 2285

1. Étudier le signe du quotient $\dfrac{6x^2-11x+4}{x-2}$.
2. Résoudre l'inéquation $\dfrac{9}{x-3}\leq -6+\dfrac{5}{2x+1}$.
3. On considère l'inéquation $-6x^4+29x^2-35>0$.
   - **a.** Déterminer les racines du polynôme du second degré $-6X^2+29X-35$, puis le factoriser.
   - **b.** En déduire une factorisation du polynôme $-6x^4+29x^2-35$.
   - **c.** Résoudre alors l'inéquation proposée.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2285

1. Le numérateur est un polynôme de degré 2 dont le terme de degré 2 est strictement positif, et le discriminant valant $\Delta=25$, il admet pour racines réelles $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{4}{3}$. D'où le tableau de signe de ce quotient :

x		$\frac{1}{2}$		$\frac{4}{3}$		2	
Signe de $6x^2-11x+4$	$+$	0	$-$	0		$+$	
Signe de $x-2$			$-$			0	$+$
Signe de $\dfrac{6x^2-11x+4}{x-2}$	$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$

2. Cette équation n'a de sens que si $x-3\neq 0$ et $2x+1\neq 0$, c'est à dire $x\neq 3$ et $x\neq -\dfrac{1}{2}$. Donc **sous réserve que** $x\neq 3$ **et** $x\neq -\dfrac{1}{2}$ on peut écrire :

$$\frac{9}{x-3}\leq 6+\frac{5}{2x+1} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{9}{x-3}+6-\frac{5}{2x+1}\leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{12x^2-17x+6}{(x-3)(2x+1)}\leq 0$$

On étudie alors le signe de ce quotient sur le même principe qu'à la question précédente pour obtenir :

x		$-\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$		3	
Signe de $12x^2-17x+6$			$+$	0	$-$	0		$+$	
Signe de $x-3$				$-$				0	$+$
Signe de $2x+1$	$-$	0				$+$			
Signe de $\dfrac{12x^2-17x+6}{(x-3)(2x+1)}$	$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$

D'où les solutions de l'équation sont : $\mathcal{S}=\left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3}\right]\cup\left[\dfrac{3}{4};3\right[$.

3. a. Le polynôme $-6X^2+29X-35$ a pour discriminant $\Delta=1$ et a donc pour racines $X_1=\dfrac{7}{3}$ et $X_2=\dfrac{5}{2}$. On en déduit alors la factorisation suivante : $\forall X\in\mathbb{R},\quad -6X^2+29X-35=-6\left(X-\dfrac{7}{3}\right)\left(X-\dfrac{5}{2}\right)$.

b. En posant $x=X^2$, on déduit de la factorisation précédente que : $\forall x\in\mathbb{R},\quad -6x^4+29x^2-35=-6\left(x^2-\dfrac{7}{3}\right)\left(x^2-\dfrac{5}{2}\right)$.

Il est clair que : $x^2-\dfrac{7}{3}=\left(x-\sqrt{\dfrac{7}{3}}\right)\left(x+\sqrt{\dfrac{7}{3}}\right)$ et $x^2-\dfrac{5}{2}=\left(x-\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right)\left(x+\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right)$.

Ainsi ; on en déduit que : $\forall x\in\mathbb{R}, -6x^4+29x^2-35=-6\left(x-\sqrt{\dfrac{7}{3}}\right)\left(x+\sqrt{\dfrac{7}{3}}\right)\left(x-\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right)\left(x+\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right)$.

c. On en déduit le signe de l'expression $-6x^4+29x-35$ à l'aide d'un tableau de signe en étudiant le signe de chacun des facteurs et en tenant compte du facteur -6 dans la factorisation :

x		$-\sqrt{\frac{5}{2}}$		$-\sqrt{\frac{7}{3}}$		$\sqrt{\frac{7}{3}}$		$\sqrt{\frac{5}{2}}$	
Signe de $-6x^4+29x-35$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Ainsi, les solutions de l'équation sont : $\mathcal{S}:\left]-\sqrt{\dfrac{5}{2}};\sqrt{\dfrac{7}{3}}\right[\cup\left]\sqrt{\dfrac{7}{3}};\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right[$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2365

L'équation (F) : $x^3+3x+1=0$ admet au moins une solution réelle.
On se propose dans cet exercice de chercher cette dernière.

On admet le résultat suivant : *Si l'on connaît la somme S et le produit P de deux nombres, alors ceux-ci sont racines de l'équation $x^2-Sx+P=0$.*

1. **Mise en place du changement de variable :** on pose $x=u+v$.
   - **a.** Montrer que : $(F) \quad \Leftrightarrow \quad u^3+3u^2v+3uv^2+v^3+3(u+v)+1=0$.
   - **b.** En factorisant par uv dans le deuxième et troisième terme, montrer que :
   $$(F) \quad \Leftrightarrow \quad u^3+3uv(u+v)+v^3+3(u+v)+1=0$$
   puis que : $(F) \quad \Leftrightarrow \quad u^3+v^3+3(u+v)(uv+1)+1=0$.
   - **c.** En se rajoutant la condition $uv+1=0$, que devient (F) ?
   - **d.** En déduire que si l'on pose $x=u+v$ avec $uv+1=0$, on est amené à résoudre le système $\mathcal{S}$: $\left\{\begin{array}{l} u^3+v^3=-1 \\ uv=-1 \end{array}\right.$.
2. **Résolution du système $\mathcal{S}$:**
   - **a.** Montrer que : $\mathcal{S} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} U+V=-1 \\ UV=-1 \end{array}\right.$ en posant $U=u^3$ et $V=v^3$.
   - **b.** En déduire que U et V sont solutions de l'équation (F_1) : $\alpha^2+\alpha-1=0$.
   - **c.** Résoudre (F_1).
   - **d.** En déduire une solution de (F).

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 2365

1. **a.** On a : $(u+v)^3=u^3+3uv^2+3u^2v+v^3$, que l'on remplace simplemnt dans (F).
   - **b.** On a : $u^3+3u^2v+3uv^2+v^3+3(u+v)+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad u^3+v^3+uv\,(3u+3v)+3(u+v)+1=0$ ou encore : $(F) \quad \Leftrightarrow \quad u^3+v^3+3uv(u+v)+3(u+v)+1=0$.
   Une dernière factorisation donne alors : $(F) \quad \Leftrightarrow \quad u^3+v^3+(u+v)\,(3uv+3)+1=0$ ou encore $u^3+v^3+3(u+v)\,(uv+1)+1=0$.
   - **c.** Lorsque l'on se rajoute la condition $uv+1=0$, il vient $u^3+v^3+1=0$.
   - **d.** Ainsi, en posant $x=u+v$ avec $uv+1=0$, résoudre (F) revient à résoudre le système $\left\{\begin{array}{l} u^3+v^3=-1 \\ uv=-1 \end{array}\right.$
2. **a.** On a en élevant au cube la deuxième équation : $\mathcal{S} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} u^3+v^3=-1 \\ u^3v^3=-1 \end{array}\right.$ car $(uv)^3=u^3v^3$, d'où le résultat en remplaçant u^3 par U et v^3 par V.
   - **b.** D'après le résultat rappelé en début de partie, on en déduit que U et V sont solutions de l'équation $\alpha^2+\alpha-1=0$, dont les solutions sont $\alpha_1=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\alpha_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
   - **c.** On en déduit que $u=\sqrt[3]{\alpha_1}$ et $v=\sqrt[3]{\alpha_2}$, et par suite que $x=\sqrt[3]{-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}+\sqrt[3]{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$.