Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs...La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1| Réf. 3747

Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ tel que sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{ab} \\ a & 1 & \frac{1}{b} \\ ab & b & 1 \end{pmatrix}$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \times b \neq 0$.

Déterminer une base du noyau et de l'image de f.

EX. 1| Éléments de correction | Réf. 3747

Puisque par hypothèse $a \times b \neq 0$, nécessairement a et b sont non nuls.
Un échelonnement en colonnes de la matrice A donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{ab} \\ a & 1 & \frac{1}{b} \\ ab & b & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - \frac{1}{a}C_1 \text{ avec } a \neq 0 \\ C_3 \leftarrow C_3 - \frac{1}{ab}C_1 \text{ avec } ab \neq 0}}{\sim_C} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ ab & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par suite, on en déduit que le rang de la matrice A est égal à 1. Or $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(f)$ c'est à dire que $\dim\left(\mathrm{Im}\,(f)\right) = 1$ et que $\mathrm{Im}\,(f)$ est une droite vectorielle.
D'après le théorème du rang, puisque $\dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3$, il vient que $\dim\left(\mathrm{Ker}\,(f)\right) = 2$.
Par construction de la matrice A, on a que $(1, a, ab) \in \mathrm{Im}\,(f)$ et qu'il est non nul, donc $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,\left((1, a, ab)\right)$.
En notant $\left(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_3}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, d'après l'échelonnement précédent, il vient que : $\overrightarrow{e_2} - \frac{1}{a}\overrightarrow{e_1} \in \mathrm{Ker}\,(f)$ et $\overrightarrow{e_3} - \frac{1}{ab}\overrightarrow{e_1} \in \mathrm{Ker}\,(f)$ et que ces deux vecteurs sont non nuls et non colinéaires. Ils forment donc une famille libre de 2 vecteurs d'un espace de dimension 2. Par théorème, ils en forment une base et par suite $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Vect}\,\left(\left(-\frac{1}{a}, 1, 0\right), \left(-\frac{1}{ab}, 0, 1\right)\right)$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2| Réf. 0813

On suppose que l'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(O\,;\, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ dans lequel seront exprimés toutes les équations cartésiennes, les coordonnées des points et vecteurs considérés dans cet exercice.
On désigne par (Σ) la surface de l'espace dont une équation cartésienne est : $(\star)$: $xy - z^3 = 0$.

1. Déterminer tous les points stationnaires de (Σ).

2. Donner un paramétrage de la droite $(\mathcal{D})$ d'équations cartésiennes $\left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 3(z-1) \end{array}\right.$.

3. Déterminer alors le(s) point(s) de (Σ) en lesquels le plan tangent à (Σ) contient la droite $(\mathcal{D})$.

EX. 2| Éléments de correction | Réf. 0813

EX. 3| Éléments de correction | Réf. 0813