Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 0359

Résoudre sur $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy suivant : $(\star) : \begin{cases} x' + \dfrac{t}{t^2+1}x = \dfrac{1}{1+t^2} \\ x(0) = 0 \end{cases}$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 0359

Les fonctions $t \longmapsto \dfrac{t}{t^2+1}$ et $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}$. ainsi d'après le théorème de Cauchy-linéaire, le problème de Cauchy $(\star)$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Résolution sur $\mathbb{R}$ de $x' + \dfrac{t}{t^2+1}x = \dfrac{1}{1+t^2}$: on reconnaît une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Solution de l'équation homogène $(\star_H) : x' + \dfrac{t}{t^2+1}x = 0$ à $(\star)$: la fonction $t \longmapsto \dfrac{t}{t^2+1}$ admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)$.

Par théorème, les solutions de $(\star_H)$ sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions : $x_h : t \longmapsto C \times \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)}$ où $C \in \mathbb{R}$ ou encore : $x_h : t \longmapsto \dfrac{C}{\sqrt{1+t^2}}$ où $C \in \mathbb{R}$.

Recherche d'une solution particulière x_P de $x' + \dfrac{t}{t^2+1}x = \dfrac{1}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}$: on cherche une solution particulière x_P sous la forme $x_P : t \longmapsto \dfrac{C(t)}{\sqrt{1+t^2}}$ où $C : t \longmapsto C(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Puisque : $\forall t \in \mathbb{R},\ x_P(t) = \dfrac{C(t)}{\sqrt{1+t^2}}$

il vient :
$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R},\ x'_P(t) &= \frac{C'(t)}{\sqrt{1+t^2}} - C(t) \times \frac{1}{2} \times 2t \times \left(1+t^2\right)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{C'(t)}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{tC(t)}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}\end{aligned}$$

Ainsi :
$$\begin{aligned}(\,x_P \text{ est solution de } (\star) \text{ sur } \mathbb{R}\,) &\Leftrightarrow \left(\forall t \in \mathbb{R},\ x'_P(t) + \frac{t}{t^2+1}x_P(t) = \frac{1}{1+t^2}\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{C'(t)}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{tC(t)}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}} + \frac{t}{t^2+1} \times \frac{C(t)}{\sqrt{1+t^2}}\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{C'(t)}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{1+t^2}\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\forall t \in \mathbb{R},\ C'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)\end{aligned}$$

En notant $f : t \longmapsto \ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)$ on a :
$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) &= \frac{1 + \dfrac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{1+t^2}} \\ &= \frac{\dfrac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\end{aligned}$$

On en déduit donc que la fonction $t :\longmapsto \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $C : t \longmapsto C(t)$.

Ainsi, la fonction $x_P : t \longmapsto \dfrac{\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)}{\sqrt{t^2+1}}$ est une solution de $(\star)$ sur $\mathbb{R}$.

Mise en forme des solutions de $x' + \dfrac{t}{t^2+1}x = \dfrac{1}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}$: les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $x' + \dfrac{t}{t^2+1}x = \dfrac{1}{1+t^2}$ sont donc les fonctions :

$$x : t \longmapsto \frac{C}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)}{\sqrt{t^2+1}} \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

Solution au problème de Cauchy $(\star)$: La solution $x : t \longmapsto x(t)$ au problème de Cauchy $(\star)$ est de la forme $x : t \longmapsto \dfrac{C}{\sqrt{1+t^2}} + \dfrac{\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)}{\sqrt{t^2+1}}$ où $C \in \mathbb{R}$.

On a alors : $$\begin{aligned} x(0) &= \frac{C}{\sqrt{1+0^2}} + \frac{\ln\left(0+\sqrt{1+0^2}\right)}{\sqrt{0^2+1}} \\ &= C + \frac{\ln(1)}{1} \\ &= C \end{aligned}$$

et par suite puisque $x(0) = 0$, il vient $C = 0$ et finalement la solution au problème de Cauchy $(\star)$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $t \longmapsto \dfrac{\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)}{\sqrt{t^2+1}}$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 0359

EX. 2 | Réf. 0694

On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$(\star_1) : (1+t)x'' - 2x' + (1-t)x = t\mathrm{e}^{t} \text{ et } (\star_2) : (1+t)x' + 2tx = t$$

1. Montrer que la fonction $x_2 : t \longmapsto \dfrac{1}{2}$ est solution de $(\star_2)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation $(\star_2)$ sur $]-1;+\infty[$.
3. Montrer que : $\left(\begin{array}{c} x : t \longmapsto x(t) \text{ est} \\ \text{solution de } (\star_1) \\ \text{sur }]-1;+\infty[\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \text{La fonction } z' : t \longmapsto z'(t) \\ \text{où } z : t \longmapsto x(t)\mathrm{e}^{-t} \\ \text{est solution sur }]-1;+\infty[\text{ de } (\star_2) \end{array}\right)$
4. Calculer $f'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ où $f : t \longmapsto \left(2t^2+6t+5\right)\mathrm{e}^{-2t}$.
5. En déduire les solutions de $(\star_1)$ sur $]-1;+\infty[$.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 0694

1. La fonction $x_2 : t \longmapsto \dfrac{1}{2}$ est solution de $(\star_2)$ sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si : $\forall t \in \mathbb{R},\ (1+t)\times x_2(t) + 2t \times x_2(t) = t$.
   On a clairement ici que : $\forall t \in \mathbb{R},\ x_2'(t) = 0$.
   Par suite, il vient : $$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R},\ (1+t)\times X_2'(t) + 2t\times x_2(t) &= (1+t)\times 0 + 2t \times \frac{1}{2} \\ &= 0 + t \\ &= t \end{aligned}$$
   et ainsi, la fonction x_2 est bien solution de l'équation $(\star_2)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Puisque : $\forall t \in]-1;+\infty[,\ 1+t \neq 0$, l'équation $(\star_2)$ est équivalente sur $]-1;+\infty[$ à l'équation différentielle $x' + \dfrac{2t}{t+1}x = \dfrac{t}{t+1}$.
   Les fonctions $t \longmapsto \dfrac{2t}{1+t}$ et $t \longmapsto \dfrac{t}{t+1}$ sont clairement continues sur $]-1;+\infty[$. Par suite, d'après le théorème de Cauchy-linéaire, l'équation $(\star_2)$ admet une solution sur $]-1;+\infty[$.

   Résolution de l'équation homogène $(\star_{H2}) : x' + \dfrac{2t}{1+t}x = 0$ associée à $(\star_2)$: puisque : $\forall t \in]-1;+\infty[,\ \dfrac{2t}{1+t} = 2 - \dfrac{2}{t+1}$ et que la fonction $t \longmapsto 1+t$ est strictement positive sur $]-1;+\infty[$, on

en déduit que la fonction $t \longmapsto 2t - 2\ln(1+t)$ est une primitive de la fonction $t \longmapsto \dfrac{2t}{t+1}$ sur $]-1;+\infty[$.
Ainsi, par théorème, les solutions de l'équation $(\star_{H2})$ sur $]-1;+\infty[$ sont les fonctions :

$$x_{2H} : t \longmapsto C\mathrm{e}^{-(2t-2\ln(1+t))} \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

ou encore : $x_{2H} : t \longmapsto C\mathrm{e}^{-2t}(1+t)^2$ où $C \in \mathbb{R}$.

Recherche d'une solution particulière $(\star_2)$ sur $]-1;+\infty[$: la solution $x_2 : t \longmapsto \dfrac{1}{2}$ étant solution de $(\star_2)$ sur $\mathbb{R}$, elle l'est trivialement sur $]-1;+\infty[$.

Mise en forme des solutions : les solutions de $(\star_2)$ sur $]-1;+\infty[$ sont les fonctions :

$$x : t \longmapsto \frac{1}{2} + C\mathrm{e}^{-2t}(1+t)^2 \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

3. En posant : $\forall t \in]-1;+\infty[,\ z(t) = x(t)\mathrm{e}^{-t}$, on en déduit que : $\forall t \in]-1;+\infty[,\ x(t) = z(t)\mathrm{e}^{t}$.
Ainsi, il vient :

$$\begin{aligned} \forall t \in]-1;+\infty[,\ x'(t) &= z'(t)\mathrm{e}^{t} + z(t)\mathrm{e}^{t} \\ \text{et } x''(t) &= z''t)\mathrm{e}^{t} + z'(t)\mathrm{e}^{t} + z'(t)\mathrm{e}^{t} + z(t)\mathrm{e}^{t} \\ &= z''(t)\mathrm{e}^{t} + 2z'(t)\mathrm{e}^{t} + z(t)\mathrm{e}^{t} \end{aligned}$$

Par suite, il vient :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} x : t \longmapsto x(t) \text{ est} \\ \text{solution de } (\star_1) \\ \text{sur }]-1;+\infty[\end{array}\right) &\Leftrightarrow \left(\forall t \in]-1;+\infty[,\ (1+t)x''(t) - 2x'(t) + (1-t)x(t) = t\mathrm{e}^{t}\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\forall t \in]-1;+\infty[,\ (1+t)\left(z''(t)\mathrm{e}^{t} + 2z'(t)\mathrm{e}^{t} + z(t)\mathrm{e}^{t}\right) - 2\left(z'(t)\mathrm{e}^{t} + z(t)\mathrm{e}^{t}\right) + (1-t)z(\right. \\ &\Leftrightarrow \left(\forall t \in]-1;+\infty[,\ (1+t)z''(t) + 2(1+t)z'(t) + (1+t)z(t) - 2z'(t) - 2z(t) + (1-t)z(t \right. \\ &\Leftrightarrow \left(\forall t \in]-1;+\infty[,\ (1+t)z''(t) + (2(1+t)-2)\,z'(t) + ((1+t)+(1-t)-2)\,z(t) = t\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\forall t \in]-1;+\infty[,\ (1+t)z''(t) + 2tz'(t) = t\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \text{La fonction } z' : t \longmapsto z'(t) \\ \text{où } z : t \longmapsto x(t)\mathrm{e}^{-t} \\ \text{est solution sur }]-1;+\infty[\text{de } (\star_2) \end{array}\right) \end{aligned}$$

4. Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) &= (2\times 2t + 6\times 1 + 0)\times \mathrm{e}^{-2t} + \left(2t^2+6t+5\right)\times\left(-2\times\mathrm{e}^{-2t}\right) \\ &= (4t+6)\,\mathrm{e}^{-2t} - 2\left(2t^2+6t+5\right)\mathrm{e}^{-2t} \\ &= \left(4t+6-4t^2-12t-10\right)\mathrm{e}^{-2t} \\ &= \left(-4t^2-8t-4\right)\mathrm{e}^{-2t} \\ &= -4(1+t)^2\,\mathrm{e}^{-2t} \end{aligned}$$

5. D'après la question 2, on en déduit que : $\forall t \in]-1;+\infty[,\ z'(t) = \dfrac{1}{2} + C\mathrm{e}^{-2t}(1+t)^2$ où $C \in \mathbb{R}$ où $C \in \mathbb{R}$.

Par suite, on en déduit que : $\forall t \in]-1;+\infty[,\ z(t) = \dfrac{t}{2} - \dfrac{C}{4}\left(2t^2+6t+5\right)\mathrm{e}^{-2t} + D$ où $(C,D) \in \mathbb{R}^2$

et finalement que : $\forall t \in]-1;+\infty[,\ x(t) = \left(\dfrac{t}{2} - \dfrac{C}{4}\left(2t^2+6t+5\right)\mathrm{e}^{-2t} + D\right)\mathrm{e}^{t}$ où $(C,D) \in \mathbb{R}^2$

EX. 3 | Réf. 0694

EX. 4 | Éléments de correction | Réf. 0694

Préparation à l'oral

EX. 4 | Réf. 0358

On considère le système différentiel $(\star)$: $\left\{\begin{array}{l} x_1' + 4x_2 = 2\mathrm{e}^{2t} \\ x_2' - x_1 = \mathrm{e}^{2t} \end{array}\right.$

1. Former une équation différentielle $(\diamond)$ du second ordre à coefficients constants satisfaite par la seule fonction x_1.

2. Résoudre l'équation $(\diamond)$.

3. En déduire le couple de fonctions (x_1, x_2) solution de $(\star)$ qui vérifie $\begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = -1 \end{cases}$.

EX. 5 | Éléments de correction | Réf. 0358

EX. 5 | Réf. 0358

EX. 6 | Éléments de correction | Réf. 0358

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 6 | Réf. 0697

On considère l'équation différentielle $(\star)$: $x' = \mathrm{e}^{x+t}$ de fonction inconnue $x : t \longmapsto x(t)$.

1. On suppose dans cette question que $x : t \longmapsto x(t)$ est solution de $(\star)$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
   a. Montrer qu'il existe un réel $c \in \mathbb{R}$ tel que la fonction x est de la forme $x : t \longmapsto -\ln(c - \mathrm{e}^{t})$.
   b. En déduire la forme de I, puis l'ensemble des solutions de $(\star)$.
2. Déterminer la solution de $(\star)$ qui vérifie $x(0) = 0$.

EX. 7 | Éléments de correction | Réf. 0697

1. a. On a :
$$\begin{aligned}(\, x \text{ est solution de } (\star) \text{ sur } I\,) &\Leftrightarrow \left(\forall t \in I,\, x'(t) = \mathrm{e}^{x(t)+t}\right)\\ &\Leftrightarrow \left(\forall t \in I,\, x'(t) = \mathrm{e}^{x(t)} \times \mathrm{e}^{t}\right)\\ &\Leftrightarrow \left(\forall t \in I,\, x'(t)\mathrm{e}^{-x(t)} = \mathrm{e}^{t}\right)\\ &\Leftrightarrow \left(\exists c \in \mathbb{R}\, \forall t \in I,\, \mathrm{e}^{-x(t)} = -\mathrm{e}^{t} + c\right)\end{aligned}$$
   Cette dernière relation n'a de sens que si $c - \mathrm{e}^{t} > 0$, et si I est tel que $c - \mathrm{e}^{t} > 0$, on en déduit que, si x est solution de $(\star)$ sur I, alors : $\forall t \in I,\, -x(t) = \ln(c - \mathrm{e}^{t})$, c'est à dire $x(t) = -\ln(c - \mathrm{e}^{t})$

   b. D'après la question précédente, il est nécessaire que pour $t \in I$, on ait $c - \mathrm{e}^{t} > 0$, c'est à dire que $t \in \left]-\infty; \ln(c)\right[$. Ainsi, I est un intervalle inclus dans l'intervalle $\left]-\infty; \ln(c)\right[$ où $c > 0$.

   On en déduit donc que : $$(\, x \text{ est solution de } (\star) \text{ sur } I\,) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c}\text{Il existe } c > 0 \text{ et un}\\ \text{intervalle } I \subset \left]-\infty; \ln(c)\right[\text{ tels que : },\\ \forall t \in I,\, x(t) = -\ln(c - \mathrm{e}^{t})\end{array}\right)$$

2. Il s'agit donc de déterminer $c > 0$ tel que $x(0) = 0$. D'après la question précédente, $x(0) = -\ln\left(c - \mathrm{e}^{0}\right)$ c'est à dire $x(0) = -\ln(c - 1)$. Par suite, il vient :
$$\begin{aligned}(\, x(0) = 0\,) &\Leftrightarrow (\, -f\ln, c - 1 = 0\,)\\ &\Leftrightarrow (\, c - 1 = 1\,)\\ &\Leftrightarrow (\, c = 2\,)\end{aligned}$$
   et finalement la solution cherchée est la fonction $x : t \longmapsto -\ln(2 - \mathrm{e}^{t})$ définie sur un intervalle inclus dans $\left]-\infty; \ln(2)\right[$.

EX. 7 | Réf. 0697

EX. 8 | Éléments de correction | Réf. 0697

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 8 | Réf. 3736

On se propose dans cet exercice de résoudre l'équation différentielle non linéaire $(\star)$ suivante :

$$(\star): \qquad yy' = xy^2 + 1$$

1. Montrer que la fonction z définie par $z(x) = (y(x))^2$ vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre (E) que l'on résoudra sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire les solutions de l'équation $(\star)$.

EX. 9 | Éléments de correction | Réf. 3736