Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 4060

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par $\Delta_n(x)$ le déterminant de taille $n \times n$ suivant :

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \dots & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -x & 1+x^2 & -x \\ 0 & \dots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

1. Calculer $\Delta_1(x)$, $\Delta_2(x)$ et $\Delta_3(x)$.

2. Montrer à l'aide d'un développement suivant une ligne puis suivant une colonne que pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\Delta_n(x) = \left(1+x^2\right)\Delta_{n-1}(x) - x^2\Delta_{n-2}(x)$$

3. À l'aide des expressions de $\Delta_1(x)$, $\Delta_2(x)$ et $\Delta_3(x)$, conjecturer une expression pour $\Delta_n(x)$ et la démontrer par récurrence.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 4060

1. Calcul de $\Delta_1(x)$: il est immédiat que $\Delta_1(x) = \left|1+x^2\right|$, c'est à dire $\Delta_1(x) = 1+x^2$.

Calcul de $\Delta_2(x)$: puisque $\Delta_2(x) = \left|1+x^2 \quad -x\&0 \quad -x \quad 1+x^2\right|$ un calcul direct donne que $\Delta_2(x) = \left(1+x^2\right)^2 - x^2$ ce qui donne $\Delta_2(x) = 1+x^2+x^4$.

Calcul de $\Delta_3(x)$: on a $\Delta_3(x) = \begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x \\ 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}$

En développant suivant la première ligne, il vient :

$$\begin{aligned} \Delta_3(x) &= (-1)^{1+1} \times \left(1+x^2\right) \times \begin{vmatrix} 1+x^2 & -x \\ -x & 1+x^2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times (-x) \times \begin{vmatrix} -x & -x \\ 0 & 1+x^2 \end{vmatrix} \\ &= \left(1+x^2\right)\left(\left(1+x^2\right)^2 - (-x)\times(-x)\right) + x\left(-x \times \left(1+x^2\right) - 0 \times (-x)\right) \\ &= \left(1+x^2\right)\left(1+x^2+x^4\right) - x^2\left(1+x^2\right) \\ &= 1+x^2+x^4+x^2+x^4+x^6-x^2-x^4 \\ &= 1+x^2+x^4+x^6 \end{aligned}$$

2. Soit $n \geq 2$. En développant par rapport à la première ligne, il vient que :

$$\Delta_n(x) = (-1)^{1+1} \times \left(1+x^2\right) \times \begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \dots & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -x & 1+x^2 & -x \\ 0 & \dots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$+ (-1)^{1+2} \times (-x) \times \begin{vmatrix} -x & -x & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1+x^2 & -x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & -x & \ddots & -x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -x & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -x \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

D'où : $\Delta_n(x) = \left(1+x^2\right)\Delta_{n-1}(x) + x \times \begin{vmatrix} -x & -x & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1+x^2 & -x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & -x & \ddots & -x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -x & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -x \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$

En développant le dernier déterminant par rapport à la 1e colonne, il vient alors :

$$\Delta_n(x) = \left(1+x^2\right)\Delta_{n-1}(x) + x \times (-1)^{1+1} \times (-x) \begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \dots & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 1+x^2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -x \\ 0 & \dots & \dots & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)}$$

c'est à dire $\Delta_n(x) = \left(1+x^2\right)\Delta_{n-1}(x) - x^2\Delta_{n-2}(x)$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\mathcal{P}(n)$: « $\Delta_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^{2k}$ »

Montrons par récurrence double sur l'entier n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : au rang 1, on a $\Delta_1(x) = 1+x^2$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{1} x^{2k} = x^{2\times 0} + x^{2\times 1}$ c'est à dire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{1} x^{2k} = 1+x^2$. Ainsi, on a bien $\Delta_1(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{1} x^{2k}$ ce qui est bien $\mathcal{P}(1)$.

Au rang 2, on a $\Delta_2(x) = 1+x^2+x^4$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{2} x^{2k} = x^{2\times 0} + x^{2\times 1} + x^{2\times 2}$ c'est à dire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{2} x^{2k} = 1+x^2+x^4$ ce qui donne bien $\Delta_2(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2} x^{2k}$ c'est à dire $\mathcal{P}(2)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$. Montrons, que sous cette hypothèse, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

D'après la question précédente, $\Delta_{n+2}(x) = \left(1+x^2\right)\Delta_{n+1}(x) - x^2\Delta_{n-1}(x)$.

Or par hypothèse de récurrence, $\Delta_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} x^{2k}$ et $\Delta_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^{2k}$, il vient alors :

$$\begin{aligned}
\Delta_{n+2}(x) &= \left(1+x^2\right)\sum_{k=0}^{n+1} x^{2k} - x^2 \sum_{k=0}^{n} x^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} x^{2k} + \sum_{k=0}^{n+1} x^{2k+2} - \sum_{k=0}^{n} x^{2k+2} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} x^{2k} + x^{2(n+1)+2} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} x^{2k} + x^{2(n+2)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+2} x^{2k}
\end{aligned}$$

ce qui est bien $\mathcal{P}(n+2)$.

Conclusion : la propriété $\mathcal{P}(n)$ étant vraies aux rangs 1 et 2, et héréditaire, par le principe de récurrence double, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4061

Pour $n \geq 2$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$, on pose :

$$V_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^{n-1} \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \ldots & \alpha_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

On considère le polynôme P_n où : $$\begin{aligned} P_n(X) &= \prod_{i=1}^{n-1} (X-\alpha_i) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \text{ avec } (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n \end{aligned}$$

1. Donner une condition sur $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ pour que $V_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ soit nul.
2. Expliciter le coefficient a_{n-1}.
3. Calculer $V_2(\alpha_1, \alpha_2)$ et $V_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ en donnant le résultat sous forme factorisée.
4. Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, on a : $V_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = P_n(\alpha_n) \times V_{n-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$.
5. Montrer par récurrence sur l'entier n que : $\forall n \geq 2, \quad V_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$.
6. Soit alors $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Calculer en donnant le résultat sous forme factorisée, le déterminant suivant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) \\ \cos(2a) & \cos(2b) & \cos(2c) \end{vmatrix}$$

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 4061

1. S'il existe $(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![;i]\!]\, j$, tel que $a_i = a_j$, le déterminant $V_n\left(a_1, \ldots, a_i, \ldots, \underbrace{a_j}_{=a_i}, \ldots, a_n\right)$ possède deux lignes identiques, et donc le déterminant est nul.

2. P_n est un polynôme de degré $n-1$ dont le coefficient du terme de degré $n-1$ est 1, et ainsi, $a_{n-1}=1$.

3. Un calcul direct donne que : $V_2(\alpha_1,\alpha_2)=\begin{vmatrix}1&\alpha_1\\1&\alpha_2\end{vmatrix}$ donc $V_2(\alpha_1,\alpha_2)=\alpha_2-\alpha_1$.

On a :
$$\begin{aligned}
V_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) &= \begin{vmatrix}1&\alpha_1&\alpha_1^2\\1&\alpha_2&\alpha_2^2\\1&\alpha_3&\alpha_3^3\end{vmatrix}\\
&\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\L_3\leftarrow L_3-L_1}}{=} \begin{vmatrix}1&\alpha_1&\alpha_1^2\\0&\alpha_2-\alpha_1&\alpha_2^2-\alpha_1^2\\0&\alpha_3-\alpha_1&\alpha_3^2-\alpha_1^2\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix}1&\alpha_1&\alpha_1^2\\0&\alpha_2-\alpha_1&(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2+\alpha_1)\\0&\alpha_3-\alpha_1&(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3+\alpha_1)\end{vmatrix}\\
&= (\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)\begin{vmatrix}1&\alpha_1&\alpha_1^2\\0&1&\alpha_2+\alpha_1\\0&1&\alpha_3+\alpha_1\end{vmatrix}\\
&\underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{=} (\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)\begin{vmatrix}1&\alpha_1&\alpha_1^2\\0&1&\alpha_2+\alpha_1\\0&0&\alpha_3-\alpha_2\end{vmatrix}\\
&= (\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)
\end{aligned}$$

4. Soit $n\geq 3$. En effectuant l'opération $C_n\leftarrow\sum_{i=1}^{n}a_{i-1}C_i$, le déterminant n'est pas changé puisque le coefficient a_{n-1} vaut 1, et il vient alors que :

$$V_n(\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_n)=\begin{vmatrix}1&\alpha_1&\alpha_1^2&\ldots&\sum_{i=0}^{n-1}a_i\alpha_1^i\\1&\alpha_2&\alpha_2^2&\ldots&\sum_{i=0}^{n-1}a_i\alpha_2^i\\1&\alpha_3&\alpha_3^2&\ldots&\sum_{i=0}^{n-1}a_i\alpha_3^i\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&\alpha_n&\alpha_n^2&\ldots&\sum_{i=0}^{n-1}a_i\alpha_n^i\end{vmatrix}$$

Or pour $i\in[\![1;n]\!]$, $\sum_{i=0}^{n-1}a_i\alpha_i^i=P_n(\alpha_i)$ et par construction de P_n, pour $i\in[\![1;n-1]\!]$, α_i est racine de P_n, ce qui donne que :

$$V_n(\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_n)=\begin{vmatrix}1&\alpha_1&\alpha_1^2&\ldots&\alpha_1^{n-1}&0\\1&\alpha_2&\alpha_2^2&\ldots&\alpha_2^{n-1}&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\\1&\alpha_{n-1}&\alpha_{n-1}^2&\ldots&\alpha_{n-1}^{n-1}&0\\1&\alpha_n&\alpha_n^2&\ldots&\alpha_n^{n-1}&P_n(\alpha_n)\end{vmatrix}$$

et en développant suivant la dernière colonne, il viendra alors que : $V_n(\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_n)=P_n(\alpha_n)\,V_{n-1}(\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_{n-1})$

5. Pour tout entier $n\geq 2$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $V_n(\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_n)=\prod_{1\leq i<j\leq n}(\alpha_j-\alpha_i)$ ».

Montrons par récurrence sur l'entier n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n\geq 2$.

Initialisation : on a vu que $V_2(\alpha_1,\alpha_2)=\alpha_2-\alpha_1$.

Comme $\prod_{1\leq i<j\leq 2}(\alpha_j-\alpha_i)=\alpha_2-\alpha_1$, on a bien $V_2(\alpha_1,\alpha_2)=\prod_{1\leq i<j\leq 2}(\alpha_j-\alpha_i)$, ce qui est $\mathcal{P}(2)$.

Hérédité : soit $n\geq 2$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$ et montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.

D'après ce qui précéde, $V_{n+1}(\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_{n+1})=P_{n+1}(\alpha_{n+1})\,V_n(\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_n)$.

Donc par hypothèse de récurrence, $V_{n+1}(\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_{n+1})=P_{n+1}(\alpha_{n+1})\times\prod_{1\leq i<j\leq n}(\alpha_j-\alpha_i)$

Or $P_{n+1}(\alpha_{n+1}) = \prod_{k=1}^{n} (\alpha_n - \alpha_k)$. Ainsi il vient que : $V_{n+1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) = \prod_{k=1}^{n} (\alpha_n - \alpha_k) \times \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$ ce qui donne bien $V_{n+1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (\alpha_j - \alpha_i)$ c'est à dire $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la propriété $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 2 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geq 2$.

6. On sait que $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) \\ 2\cos^2(a) - 1 & 2\cos^2(b) - 1 & 2\cos^2(c) - 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) \\ \cos^2(a) & \cos^2(b) & \cos^2(c) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2V_3(\cos(a), \cos(b), \cos(c)) \\ &= 2(\cos(b) - \cos(a))(\cos(c) - \cos(a))(\cos(c) - \cos(b)) \end{aligned}$$

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 1528

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe un entier naturel p tel que $A^p = 0$. On appelle indice de nilpotence de A le plus petit entier p tel que $A^p = 0$.

1. Soit A une matrice nilpotente d'indice $p > 0$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

a. Montrer qu'il existe un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$.

b. Montrer que la famille $\left(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x)\right)$ est libre.

c. Que peut-on dire pour l'indice de A ? Préciser A^n.

2. Soit A et B deux matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent.

a. Montrer que la matrice $A + B$ est nilpotente.

b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(A + xB)^n = 0$.
En déduire que si p et q sont deux entiers naturels tels que $p + q \geq n$, alors $A^p B^q = 0$.

3. Soit A une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on définit la matrice exponentielle de A par :

$$\exp(A) = \mathrm{I}_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}A^{n-1}$$

a. Montrer que si A et B sont deux matrices nilpotentes qui commutent : $\exp(A + B) = \exp(A) \times \exp(B)$.

b. En déduire que l'exponentielle d'une matrice nilpotente est inversible et préciser son inverse.

c. Déterminer l'ensemble des matrices nilpotentes A telles que $\exp(A) = \mathrm{I}_n$.

4. On considère les polynômes $P = 1 + X + \dfrac{X^2}{2!} + \ldots + \dfrac{X^{n-1}}{(n-1)!}$ et $Q = X - \dfrac{X^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{X^{n-1}}{(n-1)!}$.

a. En remarquant que P et Q sont les développements limités à l'ordre $n - 1$ de deux fonctions numériques très simples, démontrer que le polynômes $P(Q(X)) - (1 + X)$ est divisible par X^n.

b. En déduire que pour tout matrice A nilpotente de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\exp(Q(A)) = \mathrm{I}_n + A \qquad \text{et} \qquad Q(\exp(A) - \mathrm{I}_n) = A$$

5. Montrer que l'application $A \longmapsto \exp(A)$ est une bijection de l'nesemble des matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans un ensemble que l'on précisera.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 1528

1. a. p étant le plus petit entier tel que $A^p = 0$, on sait que $A^{p-1} \neq 0$. L'endomorphisme f^{p-1} est donc non nul, et il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $f^{p-1}(x) = 0$.

b. Soit $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tel que $(\star)$: $\alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \ldots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) = 0$. En composant $(\star)$ par f^{p-1}, on obtient $\alpha_0 f^{p-1}(x) = 0$ d'où $\alpha_1 = 0$, et de proche en proche, il vient $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{p-1} = 0$, et la famille $\big(x, f(x), \ldots, f^{-1}(x)\big)$ est donc libre.

c. Le cardinal d'une famille libre d'un expasce vectoriel de dimension finie est inférieur ou égal à la dimenson de cet espace. On en déduit que $p \leq n$. Comme pour tout entier $k \geq p$, $A^k = 0$, on a donc $A^n = 0$.

2. a. Calculons $(A+b)^{2n}$, et comme A et B commutent, on peut utiliser la formule du binôme : $(A+b)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} A^k B^{2n-k}$.

Si $k \geq n$, $A^k = 0$.

Si $k < n$, alors $2n - k > n$ donc $B^{2n-k} = 0$. Tous les termes de la somme sont nuls, donc $(A+B)^{2n} = 0$. La matrice $A + B$ est donc nilpotente, et d'après la question précédente, on a même $(A+B)^n = 0$.

b. Le même calcul montre que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(A + xB)^n = 0$, c'est à dire : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k x^k = 0$. Pour chaque ligne $i \in [\![1; n]\!]$ et chaque colonne $j \in [\![1; n]\!]$, on obtient un polynôme qui s'annule pour tous les réels, tous ses coefficients sont donc nuls, et par suite, pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $A^{n-k} B^k = 0$.

A fortiori, si p et q sont deux entiers naturel stels que $p > q \geq n$, $A^p B^q = 0$.

3. a. Pour tout $k \in [\![1; n-1]\!]$, la matrice $\dfrac{1}{k!} A^k$ est nilpotente. Toutes ces matrices commutent deux à deux, donc comme $\exp(A) - \mathrm{I}_n = \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k!} a^k$ est nilpotente.

En convenant que $A^0 = \mathrm{I}_n$ même si $A = 0$, on peut écrire $\exp(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{k!} A^k$.

Calculons le produit $\exp(A) \times \exp(B)$:

$$\exp(A) \times \exp(B) = \left(\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p!} A^p \right) \times \left(\sum_{q=0}^{n-1} \frac{1}{q!} B^q \right) = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} \frac{1}{p!q!} A^p B^q$$

En posant $k = p + q$ et en faisant varier k de 0 à $n - 1$, puisque $A^p B^q = 0$ si $p + q \geq n$, on peut écrire :

$$\exp(A) \times \exp(B) = \sum_{n=0}^{n-1} \sum_{p=0} k \frac{1}{p!(k-p)!} A^p B^{k-p} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \sum_{p=0}^{k} \frac{k!}{p!(k-p)!} A^p B^{k-p} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (A+B)^k = \exp(A+B)$$

b. En particulier, $\exp(A) \exp(-A) = \exp(0) = \mathrm{I}_n$. La matrice A est donc inversible et $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

c. Soit A une matrice nilpotente telle que $\exp(A) = \mathrm{I}_n$, c'est à dire $(\diamond)$: $A + \dfrac{1}{2!} A + \ldots + \dfrac{1}{(n-1)!} A^{n-1} = 0$.

Soit p l'indice de nilpotence de A, que l'on suppose supérieur ou égal à 2. En multipliant les deux membres de l'égalité $(\diamond)$ par A^{p-2}, on obtient $A^{p-1} = 0$, ce qui contredit la définition de l'indice. Donc $p = 1$, c'est à dire $A = 0$.

Pour tout matrice nilpotente A, on a donc l'implication : $\exp(A) = \mathrm{I}_n \Rightarrow A = 0$.

4. a. On reconnaît les développements limités à l'ordre $n - 1$ des fonctions $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ et $x \longmapsto \ln(1+x)$ au voisinage de 0 :

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} x^2 + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + o\left(x^{n-1}\right) = P(x) + o\left(x^{n-1}\right) \text{ et } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} + o\left(x^{n-1}\right) = Q(x$$

On en déduit que $1 + x = \mathrm{e}^{\ln(1+x)} = P(Q(x)) + o\left(x^{n-1}\right)$. La fonction polynômiale $P(Q(x)) - (1+x)$ est négligeable devant x^{n-1}, il s'agit donc d'un polynôme divisible par X^n, c'est à dire, il exist e$R \in \mathbb{R}[X]$, $\quad P(Q(X)) - (1+X) = X^n R(X)$.

b. Appliquons vette égalité à la matrice nilpotente A : $P(Q(A)) - (\mathrm{I}_n + A) = A^n R(A) = 0$. Comme $Q(A)$ est nilpotente, $P(Q(A)) = \mathrm{e}(Q(A))$, d'où $(\odot)$: $\quad \mathrm{e}(Q(A)) = I_n + A$.

De même : $x = \ln(1 + (\mathrm{e}^x - 1)) = Q(Px) - 1) + o\left(x^{n-1}\right)$. La fonction polynômiale $Q(P(x) - 1)$ est négligeable devant x^{n-1} au voisinage de 0. Il s'agit donc d'un polynôme divisible par X^n, et il existe donc

$S \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q\left(P(X)-1\right) - X = X^n S(X)$. En appliquant cette égalité à la matrice nilpotente A, $Q\left(P(A)-\mathrm{I}_n\right) - A = A^n R(A) = 0$.
Or $P(A) = \exp(A)$, donc $(\otimes)$: $\quad Q\left(\exp(A) - \mathrm{I}_n\right) = A$.

5. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}$ l'ensemble des matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A - \mathrm{I}_n$ est nilpotente. Montrons que l'application $\exp : \left|\begin{array}{lcl} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ A & \longmapsto & \exp(A) \end{array}\right.$ est bijective.

- **Injectivité :** soit $(A, A') \in \mathcal{E}^2$ tel que $\exp(A) = \exp(A')$. D'après $(\otimes)$, $Q\left(\exp(A) - \mathrm{I}_n\right) = Q\left(\exp(A') - \mathrm{I}_n\right) \Rightarrow A = A'$, donc l'application $\exp$ est injective.
- **Surjectivité :** Soit $B \in \mathcal{F}$. D'après $(\odot)$, $B = \exp\left(X\left(B - \mathrm{I}_n\right)\right)$. Donc B a pour antécédent la matrice $Q\left(B - \mathbb{I}_n\right)$ qui est nilpotente, et donc l'application $\exp$ est bien surjective.