À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs... La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

Exercice| [0664] | 1| Recherche d'équivalent

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{k}{n^2}} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

(1). Donner la limite de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ et en déduire celle de $(u_n)_{n\geq 1}$.

(2). En étudiant ensuite $v_n - u_n$, montrer que l'on a $u_n \sim v_n$ et en déduire que $u_n \sim \ln n$.

Éléments de correction

(1). Il est clair que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\frac{k+1}{k} = \ln(1+k) - \ln k$

Ainsi, il vient : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln(n+1)$.

Il s'ensuit que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Par ailleurs, puisque : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{e}^{\frac{k}{n^2}} > 1$

on a alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{e}^{\frac{k}{n^2}} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) > \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > v_n$

Donc par le théorème d'encadrement $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(2). Il est immédiat que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n - v_n = \underbrace{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{\frac{k}{n^2}} - 1\right) \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}_{>0}$.

Par ailleurs, si $k \in [\![1;n]\!]$, on a $\dfrac{k}{n^2} \in \left[\dfrac{1}{n^2};\dfrac{1}{n}\right]$ et par croissance de la fonction exponentielle que $\mathrm{e}^{\frac{k}{n^2}} \leq \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$.

Par suite, pour $k \in \{1,\ldots,n\}$, on a $0 < \mathrm{e}^{\frac{k}{n^2}} - 1 < \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1$ et $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) > 0$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_n - \underbrace{v_n}_{=\ln(n+1)} < \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1\right) \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}_{=\ln(n+1)}$$

Par quotient, il vient donc que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq \dfrac{u_n}{\ln(n+1)} - 1 \leq \underbrace{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$

Ainsi, il vient : $\dfrac{u_n}{\ln(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ ce qui assure que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n+1)$ mais aussi puisque $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$, que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [3324] | 2| Suites imbriquées

On considère les trois suites $(u_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ définies par les relations :

$$\begin{cases} u_1 &= 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} &= \dfrac{u_n + 2v_n + w_n}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 &= 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} &= \dfrac{u_n + v_n + 2w_n}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_1 &= 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, w_{n+1} &= \dfrac{u_n + 2v_n + 3w_n}{6} \end{cases}$$

(1). Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n < v_n < w_n$.

(2).(a). Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

(b). Montrer que la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

(c). Justifier que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est majorée par w_1 et que la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ est minorée par u_1.

(d). Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 4u_{n+1} - 6w_{n+1} = -2w_n$.
En conclure que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ sont convergentes vers la même limite ℓ.

(3). Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. On définit alors la suite $(t_n)_{n\geq 1}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad t_n = \alpha u_n + \beta v_n + \gamma w_n$$

(a). Montrer que la suite $(t_n)_{n\geq 1}$ est constante si, et seulement si, $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ est solution du système $(\mathcal{S})$ suivant :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} -9\alpha + 3\beta + 2\gamma = 0 \\ 6\alpha - 9\beta + 4\gamma = 0 \\ 3\alpha + 6\beta - 6\gamma = 0 \end{cases}$$

(b). Déterminer alors une solution non triviale du système $(\mathcal{S})$.

(4). Justifier que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ convergent vers la même limite ℓ, puis en déduire la valeur de cette limite commune.

Éléments de correction

(1). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la proposition $\mathcal{P}(n)$ par : $\mathcal{P}(n)$: « $u_n < v_n < w_n$ »
Montrons par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : vérifions que la proposition $\mathcal{P}(1)$ est vraie, c'est à dire que $u_1 < v_1 < w_1$.
Par définition des trois suites, on a $u_1 = 0$, $v_1 = 1$ et $w_1 = 2$ où l'on a clairement que $0 < 1 < 2$ ce qui donne bien $u_1 < v_1 < w_1$, c'est à dire $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, c'est à dire $u_n < v_n < w_n$, et montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$ à savoir que $u_{n+1} < v_{n+1} < w_{n+1}$.

Étude du signe de $u_{n+1} - v_{n+1}$: d'après les définitions des deux suites, on a directement que :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - v_{n+1} &= \frac{u_n + 2v_n + w_n}{4} - \frac{u_n + v_n + 2w_n}{4} \\ &= \frac{v_n - w_n}{4} \end{aligned}$$

or par hypothèse de récurrence, puisque $u_n < v_n < w_n$, on a $v_n - w_n < 0$ et par suite $u_{n+1} - v_{n+1} < 0$, c'est à dire que $u_{n+1} < v_{n+1}$.

Étude du signe de $v_{n+1} - w_{n+1}$: d'après les définitions des deux suites, on a directement que :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - w_{n+1} &= \frac{u_n + v_n + 2w_n}{4} - \frac{u_n + 2v_n + 3w_n}{6} \\ &= \frac{u_n - v_n}{12} \end{aligned}$$

or par hypothèse de récurrence, puisque $u_n < v_n < w_n$, on a $u_n - v_n < 0$ et par suite $v_{n+1} - w_{n+1} < 0$, c'est à dire que $v_{n+1} < w_{n+1}$.

On a donc bien $u_{n+1} < v_{n+1} < w_{n+1}$ ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, par le théorème de récurrence, elle est donc vraie pour tout enteir $n \in \mathbb{N}^*$.

On a donc bien montré que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n < v_n < w_n$.

(2).(a). Pour déterminer les variations de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$, on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On a directement que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad$
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n + 2v_n + w_n}{4} - u_n \\ &= \frac{-3u_n + 2\overbrace{v_n}^{v_n > u_n} + \overbrace{w_n}^{w_n > v_n > u_n}}{4} \\ &> \frac{-3u_n + 2u_n + u_n}{4} = 0 \end{aligned}$$

et ainsi, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

(b). Pour déterminer les variations de la suite $(w_n)_{n\geq 1}$, on étudie le signe de la différence $w_{n+1} - w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On a directement que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad$
$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{u_n + 2v_n + 3w_n}{6} - w_n \\ &= \frac{\overbrace{u_n}^{u_n < v_n < w_n} + 2\overbrace{v_n}^{v_n < w_n} - 3w_n}{6} \\ &< \frac{w_n + 2w_n - 3w_n}{4} = 0 \end{aligned}$$

et ainsi, la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

(c). D'après la première question on sait que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n < w_n$.

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ étant croissante, tous ses termes sont donc plus grand que son premier terme u_1, c'est à dire : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_1 \leq u_n$ et par suite $u_1 \leq u_n < w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par conséquent, la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ est minorée par u_1.

Sur le même principe, la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ étant décroissante, tous ses termes sont donc inférieurs à son premier terme w_1, c'est à dire : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad w_n \leq w_1$ et par suite $u_n < w_n \leq w_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est majorée par 1.

(d). Un calcul direct donne que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad$
$$\begin{aligned} 4u_{n+1} - 6w_{n+1} &= 4\frac{u_n + 2v_n + w_n}{4} - 6\frac{u_n + 2v_n + 3w_n}{6} \\ &= u_n + 2v_n + w_n - u_n - 2v_n - 3w_n \\ &= -2w_n \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ étant croissante majorée, par le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel ℓ_1.

La suite $(w_n)_{n\geq 1}$ étant décroissante minorée, par le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel ℓ_2.

On en déduire que $4u_{n+1} - 6w_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4\ell_1 - 6\ell_2$. Or on a $-2w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -2\ell_2$ donc par unicité de la limite, il vient que $4\ell_1 - 6\ell_2 = -2\ell_2$ c'est à dire $\ell_1 = \ell_2$.

Les deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ sont donc convergentes et convergent vers la même limite.

(3).(a). La suite $(t_n)_{n\geq 1}$ est constante si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad t_{n+1} = t_n$.

Ainsi :
$$\begin{aligned} \Big((t_n)_{n\geq 1} \text{ est constante}\Big) &\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad t_{n+1} = t_n) \\ &\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha u_{n+1} + \beta v_{n+1} + \gamma w_{n+1} = \alpha u_n + \beta v_n + \gamma w_n) \\ &\Leftrightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha\frac{u_n + 2v_n + w_n}{4} + \beta\frac{u_n + v_n + 2w_n}{4} + \gamma\frac{u_n + 2v_n + 3w_n}{6} - \right. \\ &\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (-9\alpha + 3\beta + 2\gamma)\, u_n + (6\alpha - 9\beta + 4\gamma)\, v_n + (3\alpha + 6\beta - 6\gamma) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -9\alpha + 3\beta + 2\gamma = 0 \\ 6\alpha - 9\beta + 4\gamma = 0 \\ 3\alpha + 6\beta - 6\gamma = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(t_n)_{n\geq 1}$ est constante si, et seulement $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ est solution du système $(\mathcal{S})$, .

(b). On résout le système $\mathcal{S}$ par échelonnement à l'aide de sa représentation matricielle qui est dans ce cas :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -9 & 3 & 2 & 0 \\ 6 & -9 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & -6 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{2}{3}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{3}L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} -9 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & \frac{16}{3} & 0 \\ 0 & 7 & -\frac{16}{3} & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} -9 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & \frac{16}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{3}{7}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} -9 & 0 & \frac{30}{7} & 0 \\ 0 & -7 & \frac{16}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow -\frac{1}{9}L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{7}L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{10}{21} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{16}{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On en déduit donc les relations :

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{10}{21}\gamma \\ \beta = \dfrac{16}{21}\gamma \end{cases}, \text{ où } \gamma \in \mathbb{R}$$

Par suite, en prenant $\gamma = 21$, on a $\alpha = 10$ et $\beta = 16$.

(4). Puisque l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\underset{n\to+\infty}{u_n \longrightarrow \ell} < v_n < \underset{n\to+\infty}{w_n \longrightarrow}$, d'après le théorème d'encadrement, on en déduit que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et ainsi les trois suites convergent vers la même limite ℓ.

Puisque la suite $(t_n)_{n\geq 1}$ où $t_n = 10u_n + 16v_n + 21w_n$ est constante égale à son premier terme $t_1 = 10u_1 + 16v_1 + 21w_1$ c'est à dire $t_1 = 58$ et que $10u_n + 16v_n + 21w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 10\ell + 16\ell + 21\ell$, par unicité de la limite, on en déduit que $\ell = \dfrac{58}{47}$.