Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question...**On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 1214

On se place dans $\mathbb{R}^3$ dont on note $\mathcal{B}$ la base canonique.
Soient $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (1,1,0)$ et $u_3 = (1,1,1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

On donne par ailleurs que : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et que : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. On désigne par $F = \text{Vect}\,(u_1)$ et $G = \text{Vect}\,(u_2, u_3)$.
On note p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F de direction G.

- **a.** Donner les matrices $\text{Mat}_{\mathcal{F}}(p)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{F}}(s)$.
- **b.** Déterminer alors les matrices $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$.

EX. 2 | Réf. 1323

Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^4\right)$ telle que sa matrice A dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On rappelle que l'on note $f^2 = f \circ f$.

1. Déterminer $\text{Ker}\,\left(f^2\right)$ et $\text{Ker}\,\left(f^2 - f - Id_{\mathbb{R}^4}\right)$.

2. Montrer que $\text{Ker}\,\left(f^2\right)$ et $\text{Ker}\,\left(f^2 - f - Id_{\mathbb{R}^4}\right)$ sont stables par f.

3. Sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Préparation à l'oral

EX. 3 | Réf. 4581

Soit E un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel. On suppose que p est un projecteur de E, s une symétrie vectorielle de E et $\overrightarrow{b} \in E$ est un vecteur donné.

1. Résoudre l'équation $(\star_1)$ d'inconnue le vecteur $\overrightarrow{x} \in E$: $\quad (\star_1) : \overrightarrow{x} + p\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{b}$.

2. Résoudre l'équation $(\star_2)$ d'inconnue le vecteur $\overrightarrow{x} \in E$: $\quad (\star_2) : \overrightarrow{x} + 2s\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{b}$.

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 4 | Réf. 0813

On suppose que l'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(O\,;\,\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ dans lequel seront exprimés toutes les équations cartésiennes, les coordonnées des points et vecteurs considérés dans cet exercice.

On désigne par (Σ) la surface de l'espace dont une équation cartésienne est : $(\star)$: $xy - z^3 = 0$.

1. Déterminer tous les points stationnaires de (Σ).
2. Donner un paramétrage de la droite $(\mathcal{D})$ d'équations cartésiennes $\left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 3(z-1) \end{array} \right.$.
3. Déterminer alors le(s) point(s) de (Σ) en lesquels le plan tangent à (Σ) contient la droite $(\mathcal{D})$.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 5 | Réf. 4582

Soit $F = \left\{ P \in \mathbb{R}_2[X],\ \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ et $G = \mathrm{Vect}\,\big(1 + X + X^2\big)$.

1. Démontrer que $\mathbb{R}_2[X] = F \oplus G$.
2. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, déterminer $p(P)$ en fonction de $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$.