Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question. . .**On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 4018

Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_3)$ est $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Montrer que f est un projecteur de $\mathbb{R}^3$ et identifier ses éléments caractéristiques.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4033

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On considère l'application : $\left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM - MB \end{array} \right.$.

1. On note $C = P^{-1}BP$. Déterminer C.
2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $N = P^{-1}MP$.
   a. Montrer que : $(M \in \operatorname{Ker}(f)) \Leftrightarrow (DN = NC)$
   b. Déterminer les matrices $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $DN = NC$.
   c. Montrer que l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 telles que $DN = NC$ est un espace vectoriel, et en déterminer une base et la dimension.
4. En déduire la dimension de $\operatorname{Ker}(f)$ puis la dimension de $\operatorname{Im}(f)$.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 4034

Dans tout ce qui suit, n désigne un entier strictement positif, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E. On rappelle que Id_E désigne l'application identité de E et $\tilde{0}_E$ l'endomorphisme nul de E.

1. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie 2 et on note $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$ une base de E.

   On considère l'application linéaire f ayant pour matrice dans la base $\mathcal{B}$: $M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

   a. Montrer que f est un projecteur. Quel est son rang ?
   b. Déterminer le noyau et l'image de f.
2. Dans cette question on suppose que E est de dimension finie 3 et on note $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$ une base de E.

   On note $D = \operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}\right)$ et $P = \operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_3}, 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}\right)$.

   Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}$, du projecteur sur P parallèlement à $\mathcal{D}$.

3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie n et que p désigne un projecteur de E.

a. En remarquant que pour tout $\overrightarrow{x} \in E$, $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x} - p\left(\overrightarrow{x}\right) + p\left(\overrightarrow{x}\right)$, montrer que $\mathrm{Ker}\,(p)$ et $\mathrm{Im}\,(p)$ sont supplémentaires dans E.

b. Soit q l'endomorphisme de E défini par $q = \mathrm{Id}_E - p$.

i. Montrer que q est un projecteur de E.

ii. Déterminer le noyau et l'image de q.

iii. Calculer $p \circ q$ et $q \circ p$.

c. Soient p_1 et p_2 deux projecteurs de E et $q = p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1$.

i. Montrer que si $p_1 \circ p_2 = \tilde{0}_E$, alors q est un projecteur de de E.

ii. Montrer que : $\mathrm{Ker}\,(p_1) \cap \mathrm{Ker}\,(p_2) \subset \mathrm{Ker}\,(q)$.

iii. Montrer alors que si $p_1 \circ p_2 = \tilde{0}_E$: $\mathrm{Ker}\,(p_1) \cap \mathrm{Ker}\,(p_2) = \mathrm{Ker}\,(q)$

EX. 4 | Réf. 4035

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1 et A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose par ailleurs qu'il existe deux matrices U et V de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et deux réels λ et μ tels que $\lambda \times \mu \neq 0$ et $\lambda \neq \mu$ tels que : $\begin{cases} A = \lambda U + \mu V \\ A^2 = \lambda^2 U + \mu^2 V \\ A^3 = \lambda^3 U + \mu^3 V \end{cases}$

1. Exprimer U et V en fonction de A et A^2.
En déduire que : $A^3 = (\lambda + \mu)\, A^2 - \lambda\mu A$

2. Montrer que, pour tout entier $p \geq 1$, $A^p = \lambda^p U + \mu^p V$.

3. Soient $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 2$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
On note $f^p = f \circ f \circ \ldots \circ f$ la p^e composée de f.

a. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(f^p)$.

b. Montrer que tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda\mu f^{p-1}(x) = (\lambda + \mu)\, f^p(x) - f^{p+1}(x)$.

c. En déduire que $\mathrm{Ker}\,(f^p) \subset \mathrm{Ker}\,(f)$.

d. Montrer que $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(A^p)$.