Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

Exercice| [4385] | 1| Reconnaître une loi géométrique

$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.
Soit X une variable aléatoire réelle discrète définie sur Ω telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
On suppose que la loi de X est donnée par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 3\mathbb{P}([X = n+2]) = 4\mathbb{P}([X = n+1]) - \mathbb{P}([X = n])$

(1). Démontrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([X = n]) = \alpha + \beta \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

(2). Déterminer (α, β) et expliciter alors la loi de X.

(3). Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = X + 1$.

(4). En déduire que X admet une espérance et une variance et en donner leurs valeurs.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [1311] | 2| Étude d'un couple de variables aléatoires discrètes

Dans cet exercice, on admet que, pour tout entier naturel k fixé et tout réel $x \in]-1; 1[$, la série de terme général $\dbinom{n}{k} x^{n-k}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6.
On lance ce dé jusqu'à obtenir un 6.
On rappelle que l'on désigne par « obtenir l'as » le fait d'obtenir la face numérotée 1 lors d'un lancer.
On désigne par X le nombre de lancers nécessaires et on désigne par Y le nombre d'as obtenus avant le premier 6.

(1). Quelle est la loi de X ?

(2). Déterminer $Y(\Omega)$.

(3). Soit $i \in X(\Omega)$ et $j \in Y(\Omega)$. Déterminer $\mathbb{P}_{[X=i]}([Y = j])$.

(4).(a). Soit $i \in X(\Omega)$ et $j \in Y(\Omega)$. Déterminer $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$.

(b). Déterminer la loi de Y.

(c). Soit $Z = Y + 1$. Reconnaître la loi de Z et en déduire l'espérance et la variance de Y.