

**Important**

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution.**

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique**Exercice [2320] | 1 | Suites et sommes**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{4}{k(k+1)(k+2)}$.

- (1). Déterminer trois réels a , b et c tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{4}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$.
- (2). Simplifier alors l'expression de u_n .
- (3). En déduire la limite de $(u_n)_{n \geq 1}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances**Exercice [2394] | 2 | Calcul matriciel**

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles vérifiant les relations :

$$a_0 = 1, b_0 = 2, c_0 = 7 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 3b_n + c_n \\ c_{n+1} = 3c_n \end{cases}$$

On souhaite exprimer a_n , b_n et c_n uniquement en fonction de n . Dans tout ce qui suit, on note X_n la matrice colonne

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \text{ où } n \in \mathbb{N}.$$

- (1). Trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
- (2). Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
- (3). Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^2 , N^3 , puis N^p pour $p \geq 3$.
- (4). Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = 3^n I_3 + 3^{n-1} n N + 3^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} N^2$.
- (5). En déduire a_n , b_n et c_n en fonction de n .