Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1| Réf. 2287

On se propose dans cet exercice de déterminer le signe du quotient :

$$Q(x) = \frac{-6x^3 + 19x^2 - 19x + 6}{3x^2 - 2x - 8}$$

1. Pour tout réel x, on pose $R(x) = 3x^2 - 2x - 8$. Résoudre l'équation $R(x) = 0$.

2. Pour tout réel x, on pose $P(x) = -6x^3 + 19x^2 - 19x + 6$.

a. Montrer que 1 est racine de P.

b. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x-1)\left(ax^2 + bx + c\right)$

c. Factoriser alors P sous forme d'un produit de 3 fonctions affines.

d. Résoudre l'inéquation $P(x) < 0$.

3. Utilisez les questions précédentes pour construire le tableau de signe de $Q(x)$.

EX. 1| Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2287

1. Résoudre une équation de degré 2.

2. a. Vérifier qu'un nombre est racine d'un polynôme.

b. Factoriser un polynôme de degré 3.

c. Terminer la factorisation d'un polynôme de degré 3

d. Étudier le signe d'un polynôme de degré 3.

3. Étudier le signe d'un quotient.

EX. 2| Réf. 2288

On se propose dans cet exercice de déterminer la primitive $\mathbb{F}$ qui s'annule en $x = 0$ de la fonction :

$$f : x \longmapsto \mathrm{e}^{x}\left(2\cos(x) + 3\sin(x)\right)$$

1. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On note $F : x \longmapsto a\mathrm{e}^{x}\cos(x) + b\mathrm{e}^{x}\sin(x)$.

a. Calculer $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b. Écrire un système d'équations d'inconnues les deux réels a et b pour que F puisse être une primitive f sur $\mathbb{R}$, puis le résoudre.

c. En déduire les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer alors la primitive $\mathbb{F}$ de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en $x = 0$.

EX. 2| Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2288

1. On dérive en utilisant correctement les formules de dérivation.

2. a. Après calcul, on factorisera par e^{x} et on regroupera les termes en $\cos(x)$ et $\sin(x)$ dans l'expression de $F'(x)$.

b. On procède à une identification.

c. On explicite la famille des primitives de f.

3. On ajuste la constante.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2667

On se propose de déterminer dans cet exercice le(s) polynôme(s) P de degré 2 qui satisfont à la condition suivante :

$$(\star) : \begin{cases} P(x_0) & = & y_0 \\ P(x_1) & = & y_1 \\ P(x_2) & = & y_2 \end{cases} \quad \text{où } (x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^6$$

autrement dit dont la courbe représentative passe par trois points donnés du plan.

1. **Détermination par résolution de système :** soit P le polynôme de degré donné par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = ax^2 + bx + c \text{ où } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$

Déterminer le triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour que le polynôme P satisfasse à la condition

$$(\star_0) : \begin{cases} P(-2) & = & 3 \\ P(1) & = & -2 \\ P(5) & = & 2 \end{cases}$$

2. **Mise en place de la méthode d'interpolation de Lagrange :** on cherche dans cette question à déterminer le(s) polynôme(s) P de degré 2 qui satisfont à la condition

$$(\star_1) : \begin{cases} P(-1) & = & -1 \\ P(2) & = & 3 \\ P(4) & = & 6 \end{cases}$$

a. Déterminer le triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ pour que le polynôme P donné par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \alpha(x-2)(x-4) + \beta(x+1)(x-4) + \gamma(x+1)(x-2)$$

satisfasse à $(\star_1)$.
En donner ensuite son expression développée.

b. En s'inspirant de la question précédente, déterminer un polynôme Q de degré 2 qui satisfait à la condition suivante :

$$(\star_2) : \begin{cases} Q(2) & = & -3 \\ Q(-5) & = & 1 \\ Q(-3) & = & -1 \end{cases}$$

En donner ensuite son expression développée.

3. **Formule d'interpolation de Lagrange :** soit P un polynôme de degré 2 donné par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \alpha(x - x_0)(x - x_1) + \beta(x - x_0)(x - x_2) + \gamma(x - x_1)(x - x_2)$$

et satisfaisant à la condition

$$(\star) : \begin{cases} P(x_0) & = & y_0 \\ P(x_1) & = & y_1 \\ P(x_2) & = & y_2 \end{cases}$$

où $(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^6$ est donné et tel que les points (x_0, y_0), (x_1, y_1) et (x_2, y_2) ne sont pas alignés.

a. Déterminer α, β et γ en fonction de $(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^6$.

b. Donner alors l'expression développée du polynôme R satisfaisant à la condition $(\star_3) : \begin{cases} R(-3) & = & 2 \\ R(2) & = & -1 \\ R(4) & = & 7 \end{cases}$.

4. **Extension à un polynôme de degré 3 :** en s'inspirant des questions précédentes et des formules de Lagrange établies pour un polynôme de degré 2, déterminer un polynôme S de degré 3 qui satisfait à la condition

$$(\star_4) : \begin{cases} S(-5) & = & 1 \\ S(-3) & = & -2 \\ S(2) & = & 1 \\ S(4) & = & 5 \end{cases}$$

et dont on donnera ensuite la forme développée.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf . 2667

1. Traduire en terme de système d'équations le fait que P satisfait chacune des égalités de $(\star_0)$ et le résoudre ensuite.
2. a. Évaluer P en -1 et voir ce qui reste...Faire de même ensuite en 2 et en 4.
   b. Construire la forme pseudo-factorisée de Q en s'inspirant de celle de P, et procéder de même pour identifier les coefficients α, β et γ.
3. a. Reprendre la démarche de la question précédente pour identifier le triplet (α, β, γ) dans un cadre plus général.
   b. Appliquer les résultats trouvés pour en déduire directement l'expression de P
4. Chaque terme de la forme de Lagrange doit compter ce coup-ci 3 facteurs...