

## Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'appropriier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle-même lors des évaluations en classe en temps limité.

## Un peu de technique

## EX. 1 | Réf. 3736

On se propose dans cet exercice de résoudre l'équation différentielle non linéaire (\*) suivante :

$$(*) : \quad yy' = xy^2 + 1$$

1. Montrer que la fonction  $z$  définie par  $z(x) = (y(x))^2$  vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre ( $E$ ) que l'on résoudra sur  $\mathbb{R}$ .
2. En déduire les solutions de l'équation (\*).

## EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3736

## Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

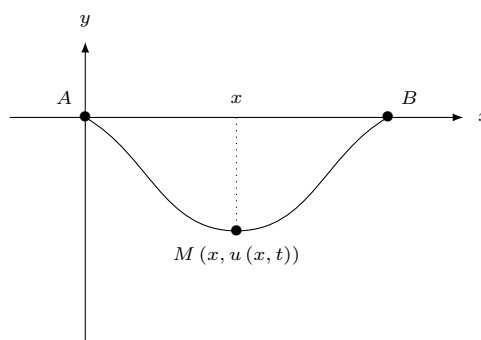
## EX. 2 | Réf. 3919

Une corde est tendue entre ses deux extrémités  $A$  et  $B$  où l'on pose  $AB = L$ .

On l'écarte verticalement de sa position d'équilibre, puis on la lâche. Elle se met alors à vibrer dans un plan vertical passant par  $A$  et  $B$  que l'on munit alors d'un repère orthonormé  $(A; \vec{i}, \vec{j})$  tel que  $\overrightarrow{AB} = L\vec{i}$  comme illustré ci-contre.

**On supposera que tous les points de la corde conservent à tout instant  $t$  la même abscisse.**

On note alors  $u : [0; L[ \times [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction qui à tout couple  $(x, t)$  associe l'ordonnée du point  $M$  d'abscisse  $x$  de la corde à l'instant  $t$ .



On démontre que la fonction  $u$  satisfait à l'équation des cordes vibrantes (\*) :  $(*) : \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = 0$  où  $c > 0$  est une constante dépendant des paramètres physiques de la corde, avec les conditions dites « aux limites » suivantes :

$$\forall t \in [0; +\infty[, \quad u(0, t) = u(L, t) = 0 \text{ qui traduisent le fait que les extrémités sont fixes.}$$

On se propose ici de déterminer les solutions particulières  $u$  non nulles de ce problème qui sont dites « à variables séparées », c'est à dire de la forme :

$$\forall (x, t) \in [0; L[ \times [0; +\infty[, \quad u(x, t) = f(x) \times g(t)$$

où  $f : [0; L[ \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  sont de classes  $\mathcal{C}^2$  sur leur ensemble de définition.

Dans toute la suite, on notera  $\mathcal{U} = [0; L[ \times [0; +\infty[$  et  $I = [0; L[$ .

1. Exprimer les dérivées partielles premières et secondes de  $u$  en tout point  $(x, t)$  de  $\mathcal{U}$  en fonction de  $f$ ,  $g$  et leurs dérivées respectives.

2. Montrer que :  $(u \text{ est solution de } (*) \text{ sur } \mathcal{U}) \Leftrightarrow \left( \forall (x, t) \in \mathcal{U}, \quad g(t)f''(x) - \frac{1}{c^2}f(x)g''(t) = 0 \right)$

3. Montrer qu'il existe  $x_0 \in I$  tel que  $f(x_0) \neq 0$ .

Pour toute la suite de l'exercice, on note  $\lambda = \frac{f''(x_0)}{f(x_0)}$ .

4. Montrer alors que :  $\forall t \in [0; +\infty[$ ,  $g''(t) = \lambda c^2 g(t)$   
 puis que :  $\forall x \in I$ ,  $f''(x) = \lambda f(x)$ .

5. Montrer que  $f(0) = f(L) = 0$ .

6. Montrer que si  $\lambda = 0$ , alors  $f$  est la fonction nulle. Qu'en conclure par rapport à notre recherche ?

7. Montrer que si  $\lambda > 0$ , alors  $f$  est la fonction nulle. Qu'en conclure par rapport à notre recherche ?

8. On suppose alors pour toute la suite de l'exercice que l'on a  $\lambda < 0$ .

a. Déterminer la fonction  $f$  solution du problème  $\begin{cases} \forall x \in I, f''(x) = \lambda f(x) \\ f(0) = 0 \\ f(L) = 0 \end{cases}$  et montrer que  $\lambda = \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

b. Déterminer alors la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

9. Dédurre de ce qui précède que les fonctions  $u$  solution de (\*) non nulles et à variables séparées sont de la forme :

$$\forall (x, t) \in \mathcal{U}, \quad u(x, t) = K \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}c(t - t_0)\right) \quad \text{où } (K, t_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

#### EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3919

1. En tenant compte que la fonction est à variables séparables, les dérivées s'obtiennent toutes seules.
2. Il suffit de reporter les dérivées partielles précédentes dans l'équation (\*).
3. Qu'est ce que cela veut dire que  $u$  n'est pas nulle sur  $\mathcal{U}$  ?
4. Il suffit de manipuler la relation de la question (2).
5. On exploite les conditions aux limites sur  $u$ .
6. On regarde ce qu'il se passe sur la forme des solutions dans ce cas par rapport au fait que  $u$  ne doit pas être nulle.
7. Même chose.
8. a. C'est une équation différentielle linéaire à résoudre.  
 b. Même chose.
9. On rassemble tous les résultats de l'exercice !