Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 1214

On se place dans $\mathbb{R}^3$ dont on note $\mathcal{B}$ la base canonique.
Soient $u_1=(1,2,3)$, $u_2=(1,1,0)$ et $u_3=(1,1,1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

On donne par ailleurs que : $\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&1\\3&0&1\end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$

et que : $\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&1\\3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0\\-1&2&-1\\3&-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

1. Montrer que la famille $\mathcal{F}=(u_1,u_2,u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. On désigne par $F=\mathrm{Vect}\,(u_1)$ et $G=\mathrm{Vect}\,(u_2,u_3)$.
   On note p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F de direction G.
   - **a.** Donner les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(p)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(s)$.
   - **b.** Déterminer alors les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1214

1. On pourra construire la matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{F}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et conclure à l'aide du théorème de caractérisation des bases par leur représentation matricielle.
2. **a.** On revient à la définition d'une projection et d'une symétrie à partir de $\mathbb{R}^3=F\oplus G$, où l'on connait la matrice d'une projection ou d'une symétrie dans une base formée par une base de F et d'une base de G.
   b. Les formules de changement de base seront utilisées ici pour revenir à la base canonique ;

EX. 2 | Réf. 1323

Soit $f\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^4\right)$ telle que sa matrice A dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ est $A=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&1\\1&0&0&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}$.

On rappelle que l'on note $f^2=f\circ f$.

1. Déterminer $\mathrm{Ker}\,\left(f^2\right)$ et $\mathrm{Ker}\,\left(f^2-f-Id_{\mathbb{R}^4}\right)$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}\,\left(f^2\right)$ et $\mathrm{Ker}\,\left(f^2-f-Id_{\mathbb{R}^4}\right)$ sont stables par f.
3. Sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1323

1. On remarquera que la représentation matricielle de f^2 dans la base canonique est A^2 et celle de $f^2-f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}$ est $A^2-A-\mathrm{I}_4$, et on prendra le temps d'observer ces dernières avant de se lancer dans la résolution des systèmes linéaires correspondant à la recherche des noyaux, surtout pour la deuxième...
2. On reviendra à la définition de ce qu'est une partie stable.
3. On a tout ce qu'il faut pour mettre en oeuvre un des théorèmes caractérisant les sous-espaces supplémentaires en dimension finie. Il reste juste à s'assurer du caractère direct de la somme de ces deux sous-espaces.

Préparation à l'oral

EX. 3 | Réf. 4581

Soit E un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel. On suppose que p est un projecteur de E, s une symétrie vectorielle de E et $\overrightarrow{b} \in E$ est un vecteur donné.

1. Résoudre l'équation $(\star_1)$ d'inconnue le vecteur $\overrightarrow{x} \in E$: $(\star_1)$: $\overrightarrow{x} + p\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{b}$.
2. Résoudre l'équation $(\star_2)$ d'inconnue le vecteur $\overrightarrow{x} \in E$: $(\star_2)$: $\overrightarrow{x} + 2s\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{b}$.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4581

1. On se souviendra de la propriété caractéristique des projecteurs...et on fera un raisonnement soit par analyse-synthèse, soit par implication ce qui demandera dans les deux cas de vérifier les solutions obtenues.
2. On se souviendra de la propriété caractéristique des symétries et on fera un raisonnement soit par analyse-synthèse, soit par implication ce qui demandera dans les deux cas de vérifier les solutions obtenues.

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 4 | Réf. 0813

On suppose que l'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(O\,;\, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ dans lequel seront exprimés toutes les équations cartésiennes, les coordonnées des points et vecteurs considérés dans cet exercice.
On désigne par (Σ) la surface de l'espace dont une équation cartésienne est : $(\star)$: $xy - z^3 = 0$.

1. Déterminer tous les points stationnaires de (Σ).
2. Donner un paramétrage de la droite $(\mathcal{D})$ d'équations cartésiennes $\left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 3(z-1) \end{array}\right.$.
3. Déterminer alors le(s) point(s) de (Σ) en lesquels le plan tangent à (Σ) contient la droite $(\mathcal{D})$.

EX. 4 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 0813

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 5 | Réf. 4582

Soit $F = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X],\ \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}$ et $G = \mathrm{Vect}\ \left(1 + X + X^2\right)$.

1. Démontrer que $\mathbb{R}_2[X] = F \oplus G$.
2. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, déterminer $p(P)$ en fonction de $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$.

EX. 5 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4582

1. On pourra par exemple chercher une base de F pour pouvoir utiliser le théorème de caractérisation des supplémentaires en dimension finie, pour ensuite s'intéresser à l'intersection des sous-espaces pour obtenir la somme directe. Mais vu la question qui suit, on a tout intérêt à revenir à la définition de deux sous-espaces supplémentaires : montrer qu'un vecteur de $\mathbb{R}_2[X]$ se décompose de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.
2. La décomposition obtenue précédemment donne directement l'expression de $p(P)$.