Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 4018

Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_3)$ est $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Montrer que f est un projecteur de $\mathbb{R}^3$ et identifier ses éléments caractéristiques.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4018

- On commence par s'assurer que f est bien un projecteur en vérifiant que sa représentation matricielle A satisfait à la relation $A^2 = A$.
- Puis on cherche les invariants par f et le noyau de f pour en déterminer ses éléments caractéristiques.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4033

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On considère l'application : $\left|\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM - MB \end{array}\right.$.

1. On note $C = P^{-1}BP$. Déterminer C.

2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

3. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $N = P^{-1}MP$.

- **a.** Montrer que : $\quad (M \in \operatorname{Ker}(f)) \quad \Leftrightarrow \quad (DN = NC)$
- **b.** Déterminer les matrices $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $DN = NC$.
- **c.** Montrer que l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 telles que $DN = NC$ est un espace vectoriel, et en déterminer une base et la dimension.

4. En déduire la dimension de $\operatorname{Ker}(f)$ puis la dimension de $\operatorname{Im}(f)$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4033

1. On commencera par déterminer P^{-1} par échelonnement en ligne de la matrice augmentée $(P|\mathrm{I}_3)$, puis de déterminer C.

2. On s'assure du caractère linéaire de f par la méthode habituelle.

3.
- **a.** On traduit la définition de $M \in \operatorname{Ker}(f)$ avec l'expression de $f(M)$ et on se débrouille pour faire apparaître C en multipliant les égalités par P et P^{-1}. Calculer $P^{-1}AP$ pourrait être intéressant...
- **b.** On écrit les deux produits matriciels DN et NC et on identifie les deux matrices obtenues.
- **c.** On exploite la question précédente pour écrire que l'ensemble considéré est un $\operatorname{Vect}(\ldots)$ pour avoir le caractère espace vectoriel et la base correspondante.

4. On utilise le théorème du rang.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3| Réf. 4034

Dans tout ce qui suit, n désigne un entier strictement positif, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E. On rappelle que Id_E désigne l'application identité de E et $\tilde{0}_E$ l'endomorphisme nul de E.

1. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie 2 et on note $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$ une base de E.

On considère l'application linéaire f ayant pour matrice dans la base $\mathcal{B}$: $M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que f est un projecteur. Quel est son rang ?

b. Déterminer le noyau et l'image de f.

2. Dans cette question on suppose que E est de dimension finie 3 et on note $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$ une base de E.

On note $D = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}\right)$ et $P = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_3}, 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}\right)$.

Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}$, du projecteur sur P parallèlement à $\mathcal{D}$.

3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie n et que p désigne un projecteur de E.

a. En remarquant que pour tout $\overrightarrow{x} \in E$, $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x} - p\left(\overrightarrow{x}\right) + p\left(\overrightarrow{x}\right)$, montrer que $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont supplémentaires dans E.

b. Soit q l'endomorphisme de E défini par $q = \mathrm{Id}_E - p$.

i. Montrer que q est un projecteur de E.

ii. Déterminer le noyau et l'image de q.

iii. Calculer $p \circ q$ et $q \circ p$.

c. Soient p_1 et p_2 deux projecteurs de E et $q = p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1$.

i. Montrer que si $p_1 \circ p_2 = \tilde{0}_E$, alors q est un projecteur de de E.

ii. Montrer que : $\mathrm{Ker}\,(p_1) \cap \mathrm{Ker}\,(p_2) \subset \mathrm{Ker}\,(q)$.

iii. Montrer alors que si $p_1 \circ p_2 = \tilde{0}_E$: $\mathrm{Ker}\,(p_1) \cap \mathrm{Ker}\,(p_2) = \mathrm{Ker}\,(q)$

EX. 3| Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4034

1. a. On vérifie que $M^2 = M$ et on lit directement le rang de M.

b. L'image est immédiate, reste à trouver un vecteur du noyau.

2. Les formules de passages pour les endomorphismes peuvent être utilisée. On connaît la matrice de ce projecteur dans une base adaptée à la somme directe, reste à revenir à la base de départ.

3. a. C'est une question de cours.

b. i. Il suffit de montrer que $q \circ q = q$.

ii. Il y a un lien entre q et p (voir son cours...).

iii. On effectue le calcul pour s'apercevoir de quelque chose d'évident !

c. i. On calcule $q \circ q$ et on obtient en utilisant $p_1 \circ p_2 = \tilde{0}_E$ que $q \circ q = q$.

ii. On traduit l'appartenance aux différents noyaux.

iii. Il suffit de montrer l'inclusion réciproque.

EX. 4| Réf. 4035

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1 et A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose par ailleurs qu'il existe deux matrices U et V de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et deux réels λ et μ tels que $\lambda \times \mu \neq 0$ et $\lambda \neq \mu$ tels que : $\begin{cases} A = \lambda U + \mu V \\ A^2 = \lambda^2 U + \mu^2 V \\ A^3 = \lambda^3 U + \mu^3 V \end{cases}$

1. Exprimer U et V en fonction de A et A^2.
En déduire que : $A^3 = (\lambda + \mu) A^2 - \lambda\mu A$

2. Montrer que, pour tout entier $p \geq 1$, $A^p = \lambda^p U + \mu^p V$.

3. Soient $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 2$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
On note $f^p = f \circ f \circ \ldots \circ f$ la p^e composée de f.

a. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(f^p)$.

b. Montrer que tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda\mu f^{p-1}(x) = (\lambda + \mu)\, f^p(x) - f^{p+1}(x)$.

c. En déduire que $\mathrm{Ker}\,(f^p) \subset \mathrm{Ker}\,(f)$.

d. Montrer que $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(A^p)$.

EX. 4 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4035

1. On se sert des deux premières relations pour extraite U et V en fonction de A et A^2.

2. Une petite récurrence est au moins une idée à envisager...

3. **a.** C'est une conséquence de la définition d'un noyau et de l'image du vecteur nul par une application linéaire.

b. Interpréter matriciellement cette relation et utiliser les relations entre les puissances de A, U et V pour conclure.

c. Remarquer $f^p = f^{p-1} \circ f$ et utiliser la question précédente.

d. C'est une conséquence du théorème du rang.