Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le résultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs...La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2287

On se propose dans cet exercice de déterminer le signe du quotient :

$$Q(x) = \frac{-6x^3 + 19x^2 - 19x + 6}{3x^2 - 2x - 8}$$

1. Pour tout réel x, on pose $R(x) = 3x^2 - 2x - 8$. Résoudre l'équation $R(x) = 0$.

2. Pour tout réel x, on pose $P(x) = -6x^3 + 19x^2 - 19x + 6$.

a. Montrer que 1 est racine de P.

b. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x-1)\left(ax^2 + bx + c\right)$

c. Factoriser alors P sous forme d'un produit de 3 fonctions affines.

d. Résoudre l'inéquation $P(x) < 0$.

3. Utilisez les questions précédentes pour construire le tableau de signe de $Q(x)$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2287

1. Le discriminant du polynôme $R(x) = 3x^2 - 2x - 8$ vaut $\Delta = 100$ et a pour racines $x_1 = 2$ et $x_2 = -\frac{4}{3}$.

2. a. On calcule $P(1)$ et on obtient $P(1) = 0$.

b. En développant l'expression proposée, il vient : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$. En identifiant avec l'expression de P, on a $\begin{cases} a = -6 \\ b - a = 19 \\ c - b = -19 \\ -c = 6 \end{cases}$ d'où $a = -6$, $c = -6$ et $b = 13$. Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-1)\left(-6x^2 + 13x - 6\right)$.

c. Il reste à factoriser le polynôme $-6x^2 + 13x - 6$, ce que l'on fait en calculant ses racines qui sont $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{2}$ pour obtenir : $\forall x \in \mathbb{R}\, P(x) = -6(x-1)\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$.

d. On détermine le signe de $P(x)$ en fonction de x à l'aide du tableau suivant :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $-6x^2 + 13x - 6$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

et on en déduit les solutions de l'inéquation $P(x) < 0$: $\boxed{\mathrm{Sol}_{P(x)<0} = \left]\frac{2}{3}; 1\right[\cup \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[}$.

3. On détermine le signe de $Q(x)$ en fonction de x à l'aide du tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		$\frac{2}{3}$		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
Signe de $x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $-6x^2+13x-6$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $3x^2-2x-8$		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$-$	
Signe de $Q(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	

EX. 2 | Réf. 2288

On se propose dans cet exercice de déterminer la primitive $\mathbb{F}$ qui s'annule en $x=0$ de la fonction :

$$f : x \longmapsto \mathrm{e}^{x}\left(2\cos(x)+3\sin(x)\right)$$

1. Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On note $F : x \longmapsto a\mathrm{e}^{x}\cos(x)+b\mathrm{e}^{x}\sin(x)$.

- **a.** Calculer $F'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
- **b.** Écrire un système d'équations d'inconnues les deux réels a et b pour que F puisse être une primitive f sur $\mathbb{R}$, puis le résoudre.
- **c.** En déduire les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer alors la primitive $\mathbb{F}$ de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en $x=0$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2288

1. a. Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= a\mathrm{e}^{x}\cos(x)) - a\mathrm{e}^{x}\sin(x) + b\mathrm{e}^{x}\sin(x) + b\mathrm{e}^{x}\cos(x)) \\ &= \mathrm{e}^{x}(a\cos(x)) - a\sin(x) + b\sin(x) + b\cos(x))) \\ &= \mathrm{e}^{x}\left((a+b)\cos(x)+(b-a)\sin(x)\right) \end{aligned}$$

b. En identifiant $F'(x)$ et $f(x)$, il vient le système $\left\{\begin{array}{l} a+b=2 \\ b-a=3 \end{array}\right.$ qui donne $a=-\dfrac{1}{2}$ et $b=\dfrac{5}{2}$.

c. Les primitives sur $\mathbb{R}$ de f sont les fonctions $x\longmapsto \mathrm{e}^{x}\left(-\dfrac{1}{2}\cos(x)+\dfrac{5}{2}\sin(x)\right)+C$ où C constante réelle.

2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathbb{F}(x)=\mathrm{e}^{x}\left(-\dfrac{1}{2}\cos(x)+\dfrac{5}{2}\sin(x)\right)+C$. Or $\mathbb{F}(0)=-\dfrac{1}{2}+C$ et comme on veut $\mathbb{F}(0)=0$, il vient $C=\dfrac{1}{2}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2667

On se propose de déterminer dans cet exercice le(s) polynôme(s) P de degré 2 qui satisfont à la condition suivante :

$$(\star) : \left\{\begin{array}{rcl} P(x_0) &=& y_0 \\ P(x_1) &=& y_1 \\ P(x_2) &=& y_2 \end{array}\right. \text{ où } (x_0,x_1,x_2,y_0,y_1,y_2)\in\mathbb{R}^6$$

autrement dit dont la courbe représentative passe par trois points donnés du plan.

1. Détermination par résolution de système : soit P le polynôme de degré donné par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad P(x)=ax^2+bx+c \text{ où } (a,b,c)\in\mathbb{R}^3$$

Déterminer le triplet $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ pour que le polynôme P satisfasse à la condition

$$(\star_0) : \begin{cases} P(-2) &= 3 \\ P(1) &= -2 \\ P(5) &= 2 \end{cases}$$

2. Mise en place de la méthode d'interpolation de Lagrange : on cherche dans cette question à déterminer le(s) polynôme(s) P de degré 2 qui satisfont à la condition

$$(\star_1) : \begin{cases} P(-1) &= -1 \\ P(2) &= 3 \\ P(4) &= 6 \end{cases}$$

a. Déterminer le triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ pour que le polynôme P donné par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \alpha(x-2)(x-4) + \beta(x+1)(x-4) + \gamma(x+1)(x-2)$$

satisfasse à $(\star_1)$.
En donner ensuite son expression développée.

b. En s'inspirant de la question précédente, déterminer un polynôme Q de degré 2 qui satisfait à la condition suivante :

$$(\star_2) : \begin{cases} Q(2) &= -3 \\ Q(-5) &= 1 \\ Q(-3) &= -1 \end{cases}$$

En donner ensuite son expression développée.

3. Formule d'interpolation de Lagrange : soit P un polynôme de degré 2 donné par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \alpha\,(x-x_0)\,(x-x_1) + \beta\,(x-x_0)\,(x-x_2) + \gamma\,(x-x_1)\,(x-x_2)$$

et satisfaisant à la condition

$$(\star) : \begin{cases} P\,(x_0) &= y_0 \\ P\,(x_1) &= y_1 \\ P\,(x_2) &= y_2 \end{cases}$$

où $(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^6$ est donné et tel que les points (x_0, y_0), (x_1, y_1) et (x_2, y_2) ne sont pas alignés.

a. Déterminer α, β et γ en fonction de $(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^6$.

b. Donner alors l'expression développée du polynôme R satisfaisant à la condition $(\star_3) : \begin{cases} R(-3) &= 2 \\ R(2) &= -1 \\ R(4) &= 7 \end{cases}$.

4. Extension à un polynôme de degré 3 : en s'inspirant des questions précédentes et des formules de Lagrange établies pour un polynôme de degré 2, déterminer un polynôme S de degré 3 qui satisfait à la condition

$$(\star_4) : \begin{cases} S(-5) &= 1 \\ S(-3) &= -2 \\ S(2) &= 1 \\ S(4) &= 5 \end{cases}$$

et dont on donnera ensuite la forme développée.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 2667

1. En évaluant le polynôme P proposé en -2, 1 et 5, il vient : $\quad P$ satisfait $(\star_0) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4a - 2b + c = 3 \\ a + b + c = -2 \\ 25a + 5b + c = 2 \end{cases}$

$$\left\{\begin{array}{llll} 4a & -2b & +c & =3 \\ a & +b & +c & =-2 \\ 25a & +5b & +c & =2 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{4}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{25}{4}L_1}}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{llll} 4a & -2b & +c & =3 \\ & \frac{3}{2}b & +\frac{3}{4}c & =-\frac{11}{4} \\ & \frac{35}{2}b & -\frac{21}{4}c & =-\frac{67}{4} \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{35}{3}L_2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{llll} 4a & -2b & +c & =3 \\ & \frac{3}{2}b & +\frac{3}{4}c & =-\frac{11}{4} \\ & & -14c & =\frac{46}{3} \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{3}{56}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{14}L_3}}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{llll} 4a & -2b & & =\frac{86}{21} \\ & \frac{3}{2}b & & =-\frac{27}{14} \\ & & -14c & =\frac{46}{3} \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{4}{3}L_2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{llll} 4a & & & =\frac{32}{21} \\ & \frac{3}{2}b & & =-\frac{27}{14} \\ & & -14c & =\frac{46}{3} \end{array}\right. \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{4}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{2}{3}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{14}L_3}}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{llll} a & & & =\frac{8}{21} \\ & b & & =-\frac{9}{7} \\ & & c & =-\frac{23}{21} \end{array}\right.$$

Ainsi, le polynôme P cherché est donné par : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \frac{8}{21}x^2 - \frac{9}{7}x - \frac{23}{21}}$

2. a. On a directement que : $P(-1) = \alpha\,(-1-2)\,(-1-4)$ et donc $-1 = 15\alpha$ ce qui donne $\boxed{\alpha = -\frac{1}{15}}$.

De même : $P(2) = \beta\,(2+1)\,(2-4)$ et donc $3 = -6\beta$ ce qui donne $\boxed{\beta = -\frac{1}{2}}$.

Et enfin : $P(4) = \gamma\,(4+1)\,(4-2)$ et donc $6 = 10\gamma$ ce qui donne $\boxed{\gamma = \frac{3}{5}}$.

En développant, on obtient alors : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \frac{1}{30}x^2 + \frac{13}{10}x + \frac{4}{15}}$.

b. On cherche l'expression de Q sous la forme : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \alpha(x-2)(x+5)+\beta(x-2)(x+3)+\gamma(x+5)x+3)$ où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ sera déterminé par $(\star_2)$.
Sur le même principe alors que la question précédente, n a directement que : $Q(2) = \gamma(2+5)(2+3)$ et donc $-3 = 35\gamma$ ce qui donne $\boxed{\gamma = -\frac{3}{35}\gamma}$.

De même : $Q(-5) = \beta(-5-2)(-5+3)$ et donc $1 = 14\beta$ ce qui donne $\boxed{\beta = \frac{1}{14}\beta}$.

Et enfin : $Q(-3) = \alpha(-3-2)(-3+5)$ et donc $-1 = -10\alpha$ ce qui donne $\boxed{\alpha = \frac{1}{10}}$.

En développant, on obtient alors : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \frac{3}{35}x^2 - \frac{11}{35}x - \frac{19}{7}}$

3. a. On a directement que $P\,(x_0) = \gamma\,(x_0 - x_1)\,(x_0 - x_2)$ et donc $\boxed{\gamma = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)\,(x_0 - x_2)}}$.

De même : $P\,(x_1) = \beta\,(x_1 - x_0)\,(x_1 - x_2)$ et donc $\boxed{\beta = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)\,(x_1 - x_2)}}$.

Et on a : $P\,(x_2) = \alpha\,(x_2 - x_0)\,(x_2 - x_1)$ et donc $\boxed{\alpha = \frac{y_2}{(x_2 - x_0)\,(x_2 - x_1)}}$.

b. En appliquant les formules précédemment trouvées à la condition $(\star_3)$ pour R en écrivant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $SR(x) = \alpha(x+3)(x-2) + \beta(x+3)(x-4) + \gamma(x-2)(x-4)$, il vient que $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{10}$ et $\gamma = \frac{2}{35}$ ce qui donne pour expression développée pour S : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad R(x) = \frac{23}{25}x^2 + \frac{2}{35}x - \frac{131}{35}}$

4. On cherche le polynôme S sous la forme : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha(x+5)(x+3)(x-2) + \beta(x+5)(x+3)(x-4) + \gamma(x+3)(x-2)(x-4) + \delta(x+5)(x-2)(x-4)$ où $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$.

En évaluant en -5, puis en -2, puis en 2 et finalement en 4 comme précédemment, on obtient que $\alpha = \frac{5}{126}$, $\beta = -\frac{1}{70}$, $\delta = -\frac{1}{35}$ et $\gamma = -\frac{1}{126}$.

On en déduit alors l'expression développée de S : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad S(x) = -\frac{1}{90}x^3 + \frac{7}{30}x^2 + \frac{41}{45}x - \frac{5}{3}}$.