Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le résultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2286

Résoudre le système linéaire 3×3 suivant en détaillant les différentes étapes :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} 2x - y + 3z = -8 \\ -2x + 2y + z = -15 \\ 3x - 2y + 4z = -8 \end{cases}$$

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2286

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -8 \\ -2x + 2y + z = -15 \\ 3x - 2y + 4z = -8 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x - y + 3z = -8 \\ y + 4z = -23 \\ -y - z = 8 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x - y + 3z = -8 \\ y + 4z = -23 \\ 3z = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 3z \\ y + 4z = - \\ z = -5 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x - y = 7 \\ y = -3 \\ z = -5 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x = 4 \\ y = -3 \\ z = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = -5 \end{cases}$$

EX. 2 | Réf. 2287

On se propose dans cet exercice de déterminer le signe du quotient :

$$Q(x) = \frac{-6x^3 + 19x^2 - 19x + 6}{3x^2 - 2x - 8}$$

1. Pour tout réel x, on pose $R(x) = 3x^2 - 2x - 8$. Résoudre l'équation $R(x) = 0$.
2. Pour tout réel x, on pose $P(x) = -6x^3 + 19x^2 - 19x + 6$.
   - **a.** Montrer que 1 est racine de P.
   - **b.** Déterminer trois réels a, b et c tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x-1)\left(ax^2 + bx + c\right)$
   - **c.** Factoriser alors P sous forme d'un produit de 3 fonctions affines.
   - **d.** Résoudre l'inéquation $P(x) < 0$.
3. Utilisez les questions précédentes pour construire le tableau de signe de $Q(x)$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2287

1. Le discriminant du polynôme $R(x) = 3x^2 - 2x - 8$ vaut $\Delta = 100$ et a pour racines $x_1 = 2$ et $x_2 = -\dfrac{4}{3}$.
2. - **a.** On calcule $P(1)$ et on obtient $P(1) = 0$.
   - **b.** En développant l'expression proposée, il vient : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$. En identifiant avec l'expression de P, on a $\begin{cases} a = -6 \\ b - a = 19 \\ c - b = -19 \\ -c = 6 \end{cases}$ d'où $a = -6$, $c = -6$ et $b = 13$. Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x-1)\left(-6x^2 + 13x - 6\right)$.
   - **c.** Il reste à factoriser le polynôme $-6x^2 + 13x - 6$, ce que l'on fait en calculant ses racines qui sont $\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{3}{2}$ pour obtenir : $\forall x \in \mathbb{R}\, P(x) = -6(x-1)\left(x - \dfrac{2}{3}\right)\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$.

d. On détermine le signe de $P(x)$ en fonction de x à l'aide du tableau suivant :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $-6x^2+13x-6$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

et on en déduit les solutions de l'inéquation $P(x)<0$: $\boxed{\text{Sol}_{P(x)<0} = \left]\frac{2}{3};1\right[\cup \left]\frac{3}{2};+\infty\right[}$.

3. On détermine le signe de $Q(x)$ en fonction de x à l'aide du tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		$\frac{2}{3}$		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
Signe de $x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $-6x^2+13x-6$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $3x^2-2x-8$		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$-$	
Signe de $Q(x)$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2289

On se propose dans cet exercice de résoudre l'équation (E) : $\quad x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$.

1. 0 est-il solution de (E) ?
2. Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, développer et réduire l'expression $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+6$.
3. Montrer qu'en posant $X = x+\dfrac{1}{x}$, l'équation (E) peut se ramener à la résolution d'une équation de degré 2 en X.
   On pourra diviser (E) par x^2 en le justifiant.
4. La résoudre.
5. Déterminer alors les solutions de (E).

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 2289

1. 0 n'est pas solution de (E) puisque $0^4-5*0^3+8\times 0^2-5\times 0+1=1\neq 0$.
2. Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, on a : $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 = x^2+2+\dfrac{1}{x^2}$.
3. Puisque 0 n'est pas solution de (E), on peut, diviser (E) par x^2 et obtenir, sous cette hypothèse :

$$(E) \quad\Leftrightarrow\quad x^2-5x+8-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+2+\frac{1}{x^2}-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0 \quad\Leftrightarrow$$

4. L'équation $X^2-5X+6=0$ admet deux solutions qui sont $X_1=2$ et $X_2=3$.
5. On résoud alors :

- $x+\dfrac{1}{x}=2$ où l'on peut multiplier par x puisque $x=0$ n'est pas solution de (E), pour obtenir $x+\dfrac{1}{x}=2 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0$ c'est à dire $x=1$.
- et sur le même principe $x+\dfrac{1}{x}=3$ pour obtenir que $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ ou $x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Ainsi, les solutions de l'équation (E) sont $\left\{1, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}$.