Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 3736

On se propose dans cet exercice de résoudre l'équation différentielle non linéaire $(\star)$ suivante :

$$(\star) : \qquad yy' = xy^2 + 1$$

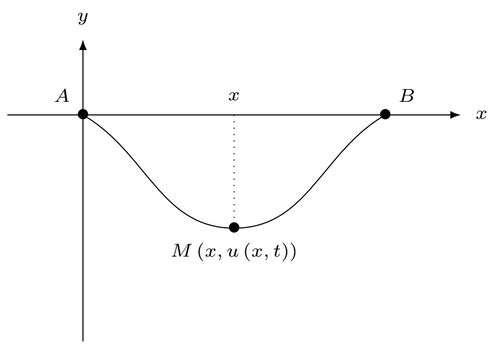
1. Montrer que la fonction z définie par $z(x) = (y(x))^2$ vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre (E) que l'on résoudra sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire les solutions de l'équation $(\star)$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 3736

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 3919

Une corde est tendue entre ses deux extrémités A et B où l'on pose $AB = L$.
On l'écarte verticalement de sa position d'équilibre, puis on la lache. Elle se met alors à vibrer dans un plan vertical passant par A et B que l'on munit alors d'un repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ tel que $\overrightarrow{AB} = L\overrightarrow{i}$ comme illustré ci-contre.
On supposera que tous les points de la corde conservent à tout instant t la même abscisse.
On note alors $u : [0;L[\times [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction qui à tout couple (x,t) associe l'ordonnée du point M d'abscisse x de la corde à l'instant t.



On démontre que la fonction u satisfait à l'équation des cordes vibrantes $(\star)$: $\qquad (\star) : \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = 0$
où $c > 0$ est une constante dépendant des paramètres physiques de la corde, avec les conditions dites « aux limites » suivantes :

$$\forall t \in [0;+\infty[, \quad u(0,t) = u(L,t) = 0 \text{ qui traduisent le fait que les extrémités sont fixes.}$$

On se propose ici de déterminer les solutions particulières u non nulles de ce problème qui sont dites « à variables séparées », c'est à dire de la forme :

$$\forall (x,t) \in [0;L[\times [0;+\infty[, \quad u(x,t) = f(x) \times g(t)$$

où $f : [0;L[\longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ sont de classes $\mathcal{C}^2$ sur leur ensemble de définition.
Dans toute la suite, on notera $\mathcal{U} = [0;L[\times [0;+\infty[$ et $I = [0;L[$.

1. Exprimer les dérivées partielles premières et secondes de u en tout point (x,t) de $\mathcal{U}$ en fonction de f, g et leurs dérivées respectives.
2. Montrer que : $\quad \left(u \text{ est solution de } (\star) \text{ sur } \mathcal{U} \right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\forall (x,t) \in \mathcal{U}, \quad g(t)f''(x) - \dfrac{1}{c^2} f(x)g''(t) = 0 \right)$
3. Montrer qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) \neq 0$.
   Pour toute la suite de l'exercice, on note $\lambda = \dfrac{f''(x_0)}{f(x_0)}$.
4. Montrer alors que : $\qquad \forall t \in [0;+\infty[, \ g''(t) = \lambda c^2 g(t)$
   puis que : $\qquad \forall x \in I, \ f''(x) = \lambda f(x)$.

5. Montrer que $f(0)=f(L)=0$.

6. Montrer que si $\lambda=0$, alors f est la fonction nulle. Qu'en conclure par rapport à notre recherche ?

7. Montrer que si $\lambda>0$, alors f est la fonction nulle. Qu'en conclure par rapport à notre recherche ?

8. On suppose alors pour toute la suite de l'exercice que l'on a $\lambda<0$.

a. Déterminer la fonction f solution du problème $\begin{cases} \forall x\in I, f''(x)=\lambda f(x) \\ f(0)=0 \\ f(L)=0 \end{cases}$ et montrer que $\lambda=\dfrac{k^2\pi^2}{L^2}$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

b. Déterminer alors la fonction g sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

9. Déduire de ce qui précède que les fonctions u solution de $(\star)$ non nulles et à variables séparées sont de la forme :

$$\forall (x,t)\in\mathcal{U},\quad u(x,t)=K\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{k\pi}{L}c\,(t-t_0)\right)\ \text{ où }\ (K,t_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$$

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 3919

1. On a directement que : $\forall (x,t)\in\mathcal{U},\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)=g(t)\times f'(x)$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)=g(t)\times f''(x)$ et

$$\forall (x,t)\in\mathcal{U},\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=f(x)\times g'(t) \quad\text{et}\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,y)=f(x)\times g''(t)$$

2. En reportant les dérivées partielles de u dans $(\star)$, on en déduit donc que :

$$\left(\ u \text{ est solution de } (\star) \text{ sur } \mathcal{U}\ \right)\quad\Leftrightarrow\quad\left(\forall (x,t)\in\mathcal{U},\quad g(t)f''(x)-\frac{1}{c^2}f(x)g''(t)=0\right)$$

3. La fonction u n'étant pas nulle sur $\mathcal{U}$, il existe $(x_0,t_0)\in\mathcal{U}$ tel que $(u,x_0)\,t_0,\neq 0$, c'est à dire $f(x_0)\times g(t_0)\neq 0$ où nécessairement les deux facteurs $f(x_0)$ et $g(t_0)$ sont non nuls tous les deux.

4. On a donc : $\forall (x,t)\in\mathcal{U},\quad g(t)f''(x)-\dfrac{1}{c^2}f(x)g''(t)=0$

Ainsi, il vient : $\quad\forall t\in[0;+\infty[,\quad g(t)f''(x_0)-\dfrac{1}{c^2}f(x_0)\,g''(t)=0$

Par suite, on en déduit puisque $f(x_0)\neq 0$ que : $\quad\forall t\in[0;+\infty[,\quad g''(t)=\lambda c^2 g(t)$.

Sur le même principe, en notant $\mu=\dfrac{g''(t_0)}{g(t_0)}$ il vient que : $\quad\forall x\in I,\quad f''(x)=\dfrac{\mu}{c^2}f(x)$.

Or puisque l'on doit avoir $g(t_0)\,f''(x_0)-\dfrac{1}{c^2}f(x_0)\,g''(t_0)=0$, on en déduit que $\dfrac{1}{c^2}\mu=\lambda$ d'où la relation pour f.

5. Par hypothèse, on a : $\forall t\in[0;+\infty[,\quad u(0,t)=0$ c'est à dire $f(0)\times g(t)=0$. Or la fonction g n'étant pas nulle car sinon la fonction u le serait, on en déduit que $f(0)=0$.
De même on montre que $f(L)=0$.

6. On suppose que $\lambda=0$. Il vient alors que : $\quad\forall x\in I,\quad f''(x)=0$ et par suite qu'il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x\in I,\quad f(x)=ax+b$. Or $f(0)=0$ et $f(L)=0$ donne $a=0$ et $b=0$ donc f est la fonction nulle, et par suite u aussi ce qui est contraire à l'hypothèse.

7. On suppose que $\lambda>0$. On montre alors que : $\exists (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in I,\quad f(x)=a\mathrm{e}^{-x\sqrt{\lambda}}+b\mathrm{e}^{x\sqrt{\lambda}}$.
Là encore, les deux conditions $f(0)=f(L)=0$ amènent à $a=b=0$ et que f est la fonction nulle et par suite u aussi ce qui est contraire à l'hypothèse.

8. **a.** Il vient dans ce cas là que : $\quad\exists (a,b)\in\mathbb{R}^2,\quad\forall x\in I,\ f(x)=a\sin\left(x\sqrt{-\lambda}\right)+b\cos\left(x\sqrt{-\lambda}\right)$.
Les conditions $f(0)=0$ et $f(L)=0$ conduisent à $b=0$ et comme f ne peut pas être la fonction nulle, on doit avoir $a\neq 0$ et par suite $\sin\left(L\sqrt{-\lambda}\right)=0$ ce qui revient à dire qu'il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $L\sqrt{-\lambda}=k\pi$ ce qui amène à $\lambda=-\dfrac{k^2\pi^2}{L^2}$.

Par conséquent : $\exists a\in\mathbb{R},\quad\forall x\in I,\ f(x)=a\sin\left(\dfrac{k\pi}{L}x\right)$.

b. On en déduit que : $\exists d\in\mathbb{R},\forall t\in[0;+\infty[,\ g(t)=d\sin\left(\dfrac{k\pi}{L}c\,(t-t_1)\right)$ en mettant sous forme d'un seul sinus la somme de cosinus et sinus donnant intialement l'expression de g après résolution de l'équation différentielle.

9. On en déduit donc que :

$$\forall (x,t) \in \mathcal{U}, \quad u(x,t) = K \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}c(t-t_1)\right) \text{ où } (K,t_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$