Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 1214

On se place dans $\mathbb{R}^3$ dont on note $\mathcal{B}$ la base canonique.
Soient $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (1, 1, 0)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

On donne par ailleurs que : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et que : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. On désigne par $F = \mathrm{Vect}\,(u_1)$ et $G = \mathrm{Vect}\,(u_2, u_3)$.
On note p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F de direction G.

- **a.** Donner les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(p)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(s)$.
- **b.** Déterminer alors les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 1214

1. D'après le théorème de caractérisation des bases par leur représentation matricielle, on a :

$$\left(\begin{array}{c} \mathcal{F}\text{, famille de 3 vecteurs de } \mathbb{R}^3, \\ \text{est une base de } \mathbb{R}^3 \text{ espace de} \\ \text{dimension 3} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \text{ est inversible}\right)$$

et où l'on a de plus : $\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})\right) \Leftrightarrow \left(\mathrm{rg}\,(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})) = 3\right)$

Par définition : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et un échelonnement en lignes donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice étant triangulaire supérieure avec tous les termes diagonaux non nuls, elle est donc de rang 3, et par suite, $\mathrm{rg}\,(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})) = 3$ ce qui assure du caractère inversible de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ et du caractère base de $\mathcal{F}$.

2. a. Puisque la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on a : $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}\right) \oplus \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\right)$, c'est à dire que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Ainsi, par théorème, on aura : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b. En notant P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{F}$, il vient que $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ et d'après les formules de changement de bases pour les endomorphismes que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(p) = P^{-1} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) \times P \text{ et } \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(s) = P^{-1} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) \times P$$

On en déduit donc que : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = P \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(p) \times P^{-1}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = P \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(s) \times P^{-1}$
On obtient l'inverse de P par échelonnement en lignes de la matrice augmentée $(\,P \mid \mathrm{I}_3\,)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 1L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 1L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow -1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

L'inverse de la matrice P est ainsi : $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

On en déduit alors que :
$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et que :
$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ -6 & 6 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 1214

EX. 2 | Réf. 1323

Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^4\right)$ telle que sa matrice A dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On rappelle que l'on note $f^2 = f \circ f$.

1. Déterminer $\mathrm{Ker}\left(f^2\right)$ et $\mathrm{Ker}\left(f^2 - f - Id_{\mathbb{R}^4}\right)$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}\left(f^2\right)$ et $\mathrm{Ker}\left(f^2 - f - Id_{\mathbb{R}^4}\right)$ sont stables par f.
3. Sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 1323

EX. 4 | Éléments de correction | Réf. 1323

1. Par définition $f^2 = f \circ f$, et par suite, si l'on note $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^2\right)$, on a $B = A^2$.
De même, en notant $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^2 - f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}\right)$, on a $C = A^2 - A - \mathrm{I}_4$.

Un calcul direct donne que : $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Recherche de $\mathrm{Ker}\left(f^2\right)$ **:** par définition, on a : $\left(\overrightarrow{x} = (x_1, \ldots, x_4) \in \mathrm{Ker}\left(f^2\right)\right) \Leftrightarrow \left(\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^2\right)}_{=B} \times \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{x}\right)}_{=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}} = \right.$

$\Leftrightarrow \left(\right.$ $(x_1, \ldots, x_4)$ est solution
représentation matricie

Un échelonnement en ligne de ce système donne :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_4}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On en déduit alors : $\left(\overrightarrow{x} = (x_1, \ldots, x_4) \in \mathrm{Ker}\left(f^2\right)\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \dfrac{1}{2}x_3 - \dfrac{1}{2}x_4 \\ x_2 & = & -\dfrac{1}{2}x_3 - \dfrac{1}{2}x_4 \end{array}\right., (x_3, x_4) \in \mathbb{R}^2$

Finalement, il vient : $\mathrm{Ker}\left(f^2\right) = \mathrm{Vect}\left((1, -1, 2, 0), (1, 1, 0, -2)\right)$

Recherche de $\mathrm{Ker}\left(f^2 - f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}\right)$ **:** d'après la représentation matricielle de $f^2 - f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$, on remarque que cette dernière est clairement de rang 2 puisque possède deux colonnes nulles et les deux autres sont non colinéaires., et par suite d'après le théorème du rang que $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(f^2 - f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}\right)\right)$ est de dimension 2. De plus, toujours à partir de cette même représentation matricielle, en notant $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_4}\right)$, il vient que $\left(f^2 - f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}\right)\left(\overrightarrow{e_2}\right) = \overrightarrow{0}$ et $\left(f^2 - f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}\right)\left(\overrightarrow{e_4}\right) = \overrightarrow{0}$.

Les deux vecteurs $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_4}$ étant non nuls et non colinéaires, ils forment donc une base de $\mathrm{Ker}\left(f^2 - f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}\right)$.

2. Stabilité de $\mathrm{Ker}\left(f^2\right)$ **par** f **:** soit $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$. Il s'agit donc de montrer que $f\left(\overrightarrow{x}\right) \in \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$, c'est à dire que $f^2\left(f\left(\overrightarrow{x}\right)\right) = \overrightarrow{0}$.

Puisque $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$, il vient que : $f^2\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0}$.

Ainsi, en composant par f à gauche, on en déduit que : $f\left(f^2\left(\overrightarrow{x}\right)\right) = f\left(\overrightarrow{0}\right)$ c'est à dire que $f^3\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0}$.

Or $f^3\left(\overrightarrow{x}\right) = f^2\left(f\left(\overrightarrow{x}\right)\right)$ et par suite, il vient que $f^2\left(f\left(\overrightarrow{x}\right)\right) = \overrightarrow{0}$ ce qui donne $f\left(\overrightarrow{x}\right) \in \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$.

Stabilité de $\mathrm{Ker}\left(f^2 - f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}\right)$ **par** f **:** soit $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}\left(f^2 - f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}\right)$. Il s'agit de montrer que $f\left(\overrightarrow{x}\right) \in \mathrm{Ker}\left(f^2 - f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}\right)$, c'est à dire que $\left(f^2 - f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}\right)\left(f\left(\overrightarrow{x}\right)\right) = \overrightarrow{0}$ ce qui revient à montrer que : $f^3\left(\overrightarrow{x}\right) - f^2\left(\overrightarrow{x}\right) - f\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0}$.

Puisque $\overrightarrow{x} \in \text{Ker}\left(f^2 - f - \text{Id}_{\mathbb{R}^4}\right)$, il vient que : $\left(f^2 - f - \text{Id}_{\mathbb{R}^4}\right)\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0}$, c'est à dire que $f^2\left(\overrightarrow{x}\right) - f\left(\overrightarrow{x}\right) - \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

En composant à gauche par f, il vient : $f\left(f^2\left(\overrightarrow{x}\right) - f\left(\overrightarrow{x}\right) - \overrightarrow{x}\right) = f\left(\overrightarrow{0}\right)$

Ainsi : $f\left(f^2\left(\overrightarrow{x}\right) - f\left(\overrightarrow{x}\right) - \overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0}$.

Or : $$\begin{aligned} f\left(f^2\left(\overrightarrow{x}\right) - f\left(\overrightarrow{x}\right) - \overrightarrow{x}\right) &= f\left(f^2\left(\overrightarrow{x}\right)\right) - f\left(f\left(\overrightarrow{x}\right)\right) - f\left(\overrightarrow{x}\right) \\ &= f^3\left(\overrightarrow{x}\right) - f^2\left(\overrightarrow{x}\right) - f\left(\overrightarrow{x}\right) \end{aligned}$$

ce qui donne donc : $f^3\left(\overrightarrow{x}\right) - f^2\left(\overrightarrow{x}\right) - f\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0}$

et ainsi on a bien $f\left(\overrightarrow{x}\right) \in \text{Ker}\left(f^2 - f - \text{Id}_{\mathbb{R}^4}\right)$.

3. Puisque $\mathbb{R}^4$ est un espace de dimension finie, on peut utiliser la caractérisation des sous-espaces supplémentaires suivantes :

$$\left(\mathbb{R}^4 = \text{Ker}\left(f^2\right) \oplus \text{Ker}\left(f^2 - f - \text{Id}_{\mathbb{R}^4}\right)\right) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dim\left(\mathbb{R}^4\right) = \dim\left(\text{Ker}\left(f^2\right)\right) + \dim\left(\text{Ker}\left(f^2 - f - \text{Id}_{\mathbb{R}^4}\right)\right) & (\star) \\ \text{Ker}\left(f^2\right) \cap \text{Ker}\left(f^2 - f - \text{Id}_{\mathbb{R}^4}\right) = \left\{\overrightarrow{0}\right\} & (\diamond) \end{cases}$$

La relation $(\star)$ est clairement vérifiée d'après les deux bases obtenues pour ces deux sous-espaces. Il reste donc à vérifier l'égalité $(\diamond)$.

Inclusion $\left\{\overrightarrow{0}\right\} \subset \text{Ker}\left(f^2\right) \cap \text{Ker}\left(f^2 - f - \text{Id}_{\mathbb{R}^4}\right)$: puisque $\text{Ker}\left(f^2\right)$ et $\text{Ker}\left(f^2 - f - \text{Id}_{\mathbb{R}^4}\right)$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, leur intersection en un aussi, et par suite le vecteur nul appartient nécessairement à cette intersection.

Inclusion $\text{Ker}\left(f^2\right) \cap \text{Ker}\left(f^2 - f - \text{Id}_{\mathbb{R}^4}\right) \subset \left\{\overrightarrow{0}\right\}$: soit $\overrightarrow{x} \in \text{Ker}\left(f^2\right) \cap \text{Ker}\left(f^2 - f - \text{Id}_{\mathbb{R}^4}\right)$.

Puisque $\overrightarrow{x} \in \text{Ker}\left(f^2\right)$, on a : $f^2\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0}$.

Puisque $\overrightarrow{x} \in \text{Ker}\left(f^2 - f - \text{Id}_{\mathbb{R}^4}\right)$, on a : $\left(f^2 - f - \text{Id}_{\mathbb{R}^4}\right)\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0}$, c'est à dire que $f^2\left(\overrightarrow{x}\right) - f\left(\overrightarrow{x}\right) - \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

On en déduit donc que $f\left(\overrightarrow{x}\right) = -\overrightarrow{x}$.

En composant par f à gauche, il vient donc $f^2\left(\overrightarrow{x}\right) = -f\left(\overrightarrow{x}\right)$ et par suite que $\overrightarrow{0} = -f\left(\overrightarrow{x}\right)$.

Ainsi, on en déduit que $f\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0}$ et donc que $-\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, c'est à dire que $\overrightarrow{x} = 0$ ce qui assure l'inclusion recherchée.

Conclusion : $\text{Ker}\left(f^2\right) \cap \text{Ker}\left(f^2 - f - \text{Id}_{\mathbb{R}^4}\right) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

Préparation à l'oral

EX. 3 | Réf. 4581

Soit E un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel. On suppose que p est un projecteur de E, s une symétrie vectorielle de E et $\overrightarrow{b} \in E$ est un vecteur donné.

1. Résoudre l'équation $(\star_1)$ d'inconnue le vecteur $\overrightarrow{x} \in E$: $(\star_1) : \overrightarrow{x} + p\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{b}$.
2. Résoudre l'équation $(\star_2)$ d'inconnue le vecteur $\overrightarrow{x} \in E$: $(\star_2) : \overrightarrow{x} + 2s\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{b}$.

EX. 5 | Éléments de correction | Réf. 4581

1. **Analyse :** supposons que $\overrightarrow{x}$ soit solution de $(\star_1)$. Comme p est un projecteur, on sait que $p \circ p = p$.

Ainsi, en composant $(\star)_1$ par p, il vient : $p\left(\overrightarrow{x}\right) + \underbrace{p\left(p\left(\overrightarrow{x}\right)\right)}_{=p\left(\overrightarrow{x}\right)} = p\left(\overrightarrow{b}\right)$.

D'où il vient que $p\left(\overrightarrow{x}\right) = \dfrac{1}{2}p\left(\overrightarrow{b}\right)$.

Par suite, en reportant dans $(\star_1)$, on aura $\overrightarrow{x} + \dfrac{1}{2}p\left(\overrightarrow{b}\right) = \overrightarrow{b}$ ce qui donne $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} - \dfrac{1}{2}p\left(\overrightarrow{b}\right)$.

Synthèse : on pose $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} - \dfrac{1}{2}p\left(\overrightarrow{b}\right)$. Montrons que $\overrightarrow{x}$ est solution de $(\star_1)$.

On a donc :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{x} + p\left(\overrightarrow{x}\right) &= \overrightarrow{b} - \frac{1}{2}p\left(\overrightarrow{b}\right) + p\left(\overrightarrow{b} - \frac{1}{2}p\left(\overrightarrow{b}\right)\right)\\ &\underset{p\in\mathcal{L}(E)}{=} \overrightarrow{b} - \frac{1}{2}p\left(\overrightarrow{b}\right) + p\left(\overrightarrow{b}\right) - \frac{1}{2}\underbrace{p\circ p\left(\overrightarrow{b}\right)}_{=p\left(\overrightarrow{b}\right)}\\ &= \overrightarrow{b} - \frac{1}{2}p\left(\overrightarrow{b}\right) + p\left(\overrightarrow{b}\right) - \frac{1}{2}p\left(\overrightarrow{b}\right)\\ &= \overrightarrow{b}\end{aligned}$$

et ainsi, $\overrightarrow{x}$ est bien solution de $(\star_1)$

Conclusion : l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_1$ de $(\star_1)$ est donc : $\mathcal{S}_1 = \left\{\overrightarrow{b} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{b}\right\}$

2. **Analyse :** soit $\overrightarrow{x}$ une solution de $(\star_2)$. Comme s est une symétrie, on sait que $s\circ s = \mathrm{Id}_E$.

Ainsi, en composant $(\star_2)$ par s, il vient : $f\left(\overrightarrow{x}\right) + 2\,\underbrace{s\left(s\left(\overrightarrow{x}\right)\right)}_{=\overrightarrow{x}} = s\left(\overrightarrow{b}\right)$.

Par suite, il vient que $s\left(\overrightarrow{x}\right) + \overrightarrow{x} = s\left(\overrightarrow{b}\right)$ et donc que $s\left(\overrightarrow{x}\right) = s\left(\overrightarrow{b}\right) - \overrightarrow{x}$.

En reportant dans $(\star_2)$, il vient : $\overrightarrow{x} + 2\left(s\left(\overrightarrow{b}\right) - \overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{b}$, ce qui donne $\overrightarrow{x} = \dfrac{1}{3}\left(2s\left(\overrightarrow{b}\right) - \overrightarrow{b}\right)$.

Synthèse : on pose $\overrightarrow{x} = \dfrac{1}{3}\left(2s\left(\overrightarrow{b}\right) - \overrightarrow{b}\right)$. Montrons que $\overrightarrow{x}$ est solution de $(\star_2)$.

On a :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{x} + 2s\left(\overrightarrow{x}\right) &= \frac{1}{3}\left(2s\left(\overrightarrow{b}\right) - \overrightarrow{b}\right) + 2s\left(\frac{1}{3}\left(2s\left(\overrightarrow{b}\right) - \overrightarrow{b}\right)\right)\\ \underbrace{s\in\mathcal{L}(E)}&= \frac{2}{3}s\left(\overrightarrow{b}\right) - \frac{1}{3}\overrightarrow{b} + \frac{4}{3}\underbrace{s\circ s\left(\overrightarrow{b}\right)}_{=\overrightarrow{b}} - \frac{2}{3}s\left(\overrightarrow{b}\right)\\ &= \overrightarrow{b}\end{aligned}$$

et donc $\dfrac{1}{3}\left(2s\left(\overrightarrow{b}\right) - \overrightarrow{b}\right)$ est solution de $(\star_2)$.

Conclusion : l'ensemble $\mathcal{S}_2$ des solutions de $(\star_2)$ est : $\mathcal{S}_2 = \left\{\dfrac{1}{3}\left(2s\left(\overrightarrow{b}\right) - \overrightarrow{b}\right)\right\}$.

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 4 | Réf. 0813

On suppose que l'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(O\,;\,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$ dans lequel seront exprimés toutes les équations cartésiennes, les coordonnées des points et vecteurs considérés dans cet exercice.
On désigne par (Σ) la surface de l'espace dont une équation cartésienne est : $(\star)$: $xy - z^3 = 0$.

1. Déterminer tous les points stationnaires de (Σ).
2. Donner un paramétrage de la droite $(\mathcal{D})$ d'équations cartésiennes $\left\{\begin{array}{l} x = 2\\ y = 3(z-1)\end{array}\right.$.
3. Déterminer alors le(s) point(s) de (Σ) en lesquels le plan tangent à (Σ) contient la droite $(\mathcal{D})$.

EX. 6 | Éléments de correction | Réf. 0813

EX. 7 | Éléments de correction | Réf. 0813

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 5 | Réf. 4582

Soit $F = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X],\ \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}$ et $G = \mathrm{Vect}\ \left(1+X+X^2\right)$.

1. Démontrer que $\mathbb{R}_2[X] = F \oplus G$.

2. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, déterminer $p(P)$ en fonction de $\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$.

EX. 8 | Éléments de correction | Réf. 4582

1. Par définition : $(\mathbb{R}_2[X] = F \oplus G) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \exists!\,(P_f, P_g) \in F \times G,\ P = P_f + P_g)$

Analyse : soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Supposons que l'on ait $(P_f, P_g) \in F \times G$ telle que $P = P_f + P_g$.
Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P = P_f + \lambda\left(1+X+X^2\right) \quad (\star)$.

Or on a par hypothèse que $\int_0^1 P_f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Par suite, en intégrant $(\star)$ sur l'intervalle $[0;1]$, il vient :

$$\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_0^1 P_f(t)\,\mathrm{d}t}_{=0} + \underbrace{\int_0^1 \lambda\left(1+t+t^2\right)\,\mathrm{d}t}_{=\lambda \underbrace{\int_0^1 \left(1+t+t^2\right)\,\mathrm{d}t}_{=\frac{11}{6}}}$$

Par suite, il vient que : $\lambda = \dfrac{6}{11}\displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$.

De plus, on en déduit alors que : $P_f = P - \left(\dfrac{6}{11}\displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(X^2+X+1\right)$

Synthèse : Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Posons $P_f = P - \left(\dfrac{6}{11}\displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(X^2+X+1\right)$ et $P_g = \dfrac{6}{11}\displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t\left(1+X+X^2\right)$.

On a bien :
$$\begin{aligned} P_f + P_g &= P - \left(\frac{6}{11}\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(X^2+X+1\right) + \frac{6}{11}\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t\left(1+X+X^2\right) \\ &= P \end{aligned}$$

De plus, puisque $\dfrac{6}{11}\displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$, on a bien $P_g \in G$.

Et par ailleurs :
$$\begin{aligned} \int_0^1 P_f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \left(P(t) - \left(\frac{6}{11}\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(t^2+t+1\right)\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t - \left(\frac{6}{11}\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t\right)\underbrace{\int_0^1 \left(t^2+t+1\right)\,\mathrm{d}t}_{=\frac{11}{6}} \\ &= \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 0 \end{aligned}$$

et donc $P_f \in F$.

On en déduit donc que tout polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ se décompose de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.
Ainsi, $\mathbb{R}_2[X] = F \oplus G$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Par définition du projecteur p sur F parallèlement à G, on a : $p(P) = P_f$.
Ainsi : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\, p(P) = P - \left(\dfrac{6}{11}\displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(X^2 + X + 1\right).$