Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 4018

Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_3)$ est $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Montrer que f est un projecteur de $\mathbb{R}^3$ et identifier ses éléments caractéristiques.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 4018

Caractère projecteur de f : La caractérisation des projecteurs se traduit maticiellement par :

$$\left(f \text{ est un projecteur de } \mathbb{R}^3 \right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \right)$$

Un calcul direct donne que : $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 12 & -6 \\ 12 & 12 & 12 \\ -6 & 12 & 30 \end{pmatrix}$ ce qui donne bien en multipliant les deux membres de l'égalité par $\dfrac{1}{36}$ que $A^2 = A$.

Par suite, f est bien un projecteur.

Recherche des éléments caratéristiques : en notant $F_1 = \left\{ \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3,\ f\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{x} \right\}$ l'ensemble des vecteurs invariants de $\mathbb{R}^3$ par f et $F_2 = \operatorname{Ker}(p)$, on sait que f est alors le projecteur sur F_1 parallèlement à F_2.

Identification de F_1 : on a directement que :

$$\left(\overrightarrow{x} = (x_1, \ldots, x_3) \in F_1 \right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c} (x_1, \ldots, x_3) \text{ est solution du système} \\ \text{de représentation matricielle} \\ (A - \mathrm{I}_3 | 0) \end{array} \right)$$

Un échelonnement en ligne donne que : $(A - \mathrm{I}_3|0) \sim_L \ldots \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{x} = (x_1, \ldots, x_3) \in F_1 \right) & \Leftrightarrow \left(x_1 = 2x_2 - x_3,\ (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 \right) \\ & \Leftrightarrow \left(\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2x_2 - x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{array} \right. ,\ (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 \right) \\ & \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{x} \in \operatorname{Vect}\left((2,1,0), (-1,0,1)\right) \right) \end{aligned}$$

et par suite que $F_1 = \operatorname{Vect}\left((2,1,0), (-1,0,1)\right)$.

Identification de F_2 : on a directement que :

$$\left(\overrightarrow{x} = (x_1, \ldots, x_3) \in \operatorname{Ker}(p) \right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c} (x_1, \ldots, x_3) \text{ est solution du système} \\ \text{de représentation matricielle} \\ (A | 0) \end{array} \right)$$

Un échelonnement en ligne donne que : $(A|0) \sim_L \ldots \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

On en déduit donc que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}\left((1,-2,1)\right)$.

Ainsi, f est le projecteur sur $F_1 = \operatorname{Vect}\left((2,1,0), (-1,0,1)\right)$ de direction $F_2 = \operatorname{Vect}\left((1,-2,1)\right)$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4033

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&-1\\-2&-2&-1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2&1&1\\-3&-2&-1\\1&1&0\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad P=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

On considère l'application $:\left|\begin{array}{ccc}\mathscr{M}_3(\mathbb{R})&\longrightarrow&\mathscr{M}_3(\mathbb{R})\\M&\longmapsto&AM-MB\end{array}\right.$.

1. On note $C=P^{-1}BP$. Déterminer C.
2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Soit $M\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $N=P^{-1}MP$.
   - **a.** Montrer que : $\left(M\in\operatorname{Ker}(f)\right)\quad\Leftrightarrow\quad\left(DN=NC\right)$
   - **b.** Déterminer les matrices $N\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $DN=NC$.
   - **c.** Montrer que l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 telles que $DN=NC$ est un espace vectoriel, et en déterminer une base et la dimension.
4. En déduire la dimension de $\operatorname{Ker}(f)$ puis la dimension de $\operatorname{Im}(f)$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 4033

1. **Recherche de l'inverse de P par échelonnement en lignes :**

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\-1&1&1&0&1&0\\0&1&-1&0&0&1\end{array}\right)\underset{L_2\leftarrow L_2+1L_1}{\sim_L}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&0&1&1&1&0\\0&1&-1&0&0&1\end{array}\right)\underset{L_2\leftrightarrow L_3}{\sim_L}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&1&-1&0&0&1\\0&0&1&1&1&0\end{array}\right)$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang de la matrice est donc 3 et la matrice est ainsi inversible puisque carrée d'ordre 3 et de rang 3.
On poursuit alors l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&1&-1&0&0&1\\0&0&1&1&1&0\end{array}\right)\underset{L_2\leftarrow L_2+1L_3}{\sim_L}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&1&0&1&1&1\\0&0&1&1&1&0\end{array}\right)\underset{L_1\leftarrow L_1+1L_2}{\sim_L}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&1&1\\0&1&0&1&1&1\\0&0&1&1&1&0\end{array}\right)$$

L'inverse de la matrice$P$ est ainsi : $P^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

Calcul de C : le produit matriciel $P^{-1}BP$ donne :

$$\underbrace{\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1\\-3&-2&-1\\1&1&0\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&0&0\\-1&-1&0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

et ainsi $C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

2. **Caractère linéaire de f :** soient $(M_1,M_2)\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})\times\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.
On pose $M_3=\lambda M_1+M_2$. On a alors :

$$\begin{aligned}f(M_3)&=f(\lambda M_1+M_2)\\&=A(\lambda M_1+M_2)+(\lambda M_1+M_2)B\\&=\lambda AM_1+AM_1+\lambda M_1B-M_2B\\&=\lambda(AM_1-BM_1)+(AM_2-BM_2)\\&=\lambda f(M_1)+f(M_2)\end{aligned}$$

et par suite f est bien linéaire.

Caractère endomorphisme : puisque $f : \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de par sa définition et que f est linéaire, on en déduit que f est bien un endomorphisme de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

3. a. Puisque $N = P^{-1}MP$, il vient que $M = PNP^{-1}$ et par définition du noyau d'une application linéaire, on a :

$$\begin{array}{rcl}
(M \in \mathrm{Ker}(f)) & \Leftrightarrow & (AM - MB = (0)) \\
& \Leftrightarrow & (AM = MB) \\
& \Leftrightarrow & (APNP^{-1} = PNP^{-1}B) \\
& \Leftrightarrow & (APNP^{-1}P = PNP^{-1}BP) \\
& \Leftrightarrow & (APN = PNC) \\
& \Leftrightarrow & (P^{-1}APN = P^{-1}PNC) \\
& \Leftrightarrow & (P^{-1}APN = NC)
\end{array}$$

Or on remarque que $P^{-1}AP = D$ ce qui permet d'obtenir que : $(M \in \mathrm{Ker}(f)) \quad \Leftrightarrow \quad (DN = NC)$.

b. En notant $N = (n_{ij})_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 3}}$, il vient que : $DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -n_{21} & -n_{22} & -n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix}$ et $NC = \begin{pmatrix} n_{11} & 0 & -n_{13} \\ n_{21} & 0 & -n_{23} \\ n_{31} & 0 & -n_{33} \end{pmatrix}$

Par suite et par identification des coefficients des matrices :

$$\begin{array}{rcl}
\begin{pmatrix} N \text{ est telle que} \\ DN = NC \end{pmatrix} & \Leftrightarrow & \begin{cases} n_{11} = 0 \\ -n_{21} = n_{21} \\ n_{31} = n_{31} \\ -n_{22} = 0 \\ n_{32} = 0 \\ -n_{13} = 0 \\ -n_{23} = -n_{23} \\ n_{33} = -n_{33} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow & \left(\begin{cases} n_{11} = 0 \\ n_{21} = 0 \\ n_{22} = 0 \\ n_{32} = 0 \\ n_{13} = 0 \\ n_{33} = 0 \end{cases}, (n_{31}, n_{12}, n_{23}) \in \mathbb{R}^3 \right) \\
& \Leftrightarrow & \left(N = \begin{pmatrix} 0 & n_{12} & 0 \\ 0 & 0 & n_{23} \\ n_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}, (n_{31}, n_{12}, n_{23}) \in \mathbb{R}^3 \right)
\end{array}$$

c. En notant $F = \{N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}), DN = NC\}$, d'après la question précédente, il vient que $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ Par suite, F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, donc un espace vectoriel. Par ailleurs la famille $(E_{1,2}, E_{2,3}, E_{3,1})$ étant une sous-famille de la base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, c'est donc une sous-famille d'une famille libre. Elle est donc libre, et forme ainsi, puisqu'elle est génératrice de F, une base de F et on a que $\dim(F) = 3$

4. On en déduit donc que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3$. De plus, d'après le théorème du rang, il vient que :

$$\dim(\mathscr{M}_3(\mathbb{R})) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) \text{ ce qui donne } \mathrm{rg}(f) = 6$$

et donc que la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ est de 6.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 4034

Dans tout ce qui suit, n désigne un entier strictement positif, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E. On rappelle que Id_E désigne l'application identité de E et $\tilde{0}_E$ l'endomorphisme nul de E.

1. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie 2 et on note $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$ une base de E.

On considère l'application linéaire f ayant pour matrice dans la base $\mathcal{B}$: $\quad M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que f est un projecteur. Quel est son rang ?

b. Déterminer le noyau et l'image de f.

2. Dans cette question on suppose que E est de dimension finie 3 et on note $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$ une base de E.

On note $D = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}\right)$ et $P = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_3}, 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}\right)$.

Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}$, du projecteur sur P parallèlement à $\mathcal{D}$.

3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie n et que p désigne un projecteur de E.

a. En remarquant que pour tout $\overrightarrow{x} \in E$, $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x} - p\left(\overrightarrow{x}\right) + p\left(\overrightarrow{x}\right)$, montrer que $\mathrm{Ker}\,(p)$ et $\mathrm{Im}\,(p)$ sont supplémentaires dans E.

b. Soit q l'endomorphisme de E défini par $q = \mathrm{Id}_E - p$.

i. Montrer que q est un projecteur de E.

ii. Déterminer le noyau et l'image de q.

iii. Calculer $p \circ q$ et $q \circ p$.

c. Soient p_1 et p_2 deux projecteurs de E et $q = p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1$.

i. Montrer que si $p_1 \circ p_2 = \tilde{0}_E$, alors q est un projecteur de de E.

ii. Montrer que : $\quad \mathrm{Ker}\ (p_1) \cap \mathrm{Ker}\ (p_2) \subset \mathrm{Ker}\,(q)$.

iii. Montrer alors que si $p_1 \circ p_2 = \tilde{0}_E$: $\quad \mathrm{Ker}\ (p_1) \cap \mathrm{Ker}\ (p_2) = \mathrm{Ker}\,(q)$

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 4034

1. a. La caractérisation des projecteurs se traduit matriciellement par : $\left(f \text{ est un projecteur de } E\right) \Leftrightarrow \left(M^2 = M\right)$

Un calcul direct montre que $M^2 = M$ et ainsi f est bien un projecteur de f.

De plus, les deux colonnes de M étant liées, on en déduit que $\mathrm{rg}\,(M) = 1$, et par suite que $\mathrm{rg}\,(f) = 1$.

b. Puisque $\mathrm{rg}\,(f) = 1$ et que $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{e_1} - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{e_2} \in \mathrm{Im}\,(f)$ par construction de M, on en déduit que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2}\right)$.

De plus d'après le théorème du rang : $\dim(E) = \dim\left(\mathrm{Ker}\,(f)\right) + \mathrm{rg}\,(f)$ et donc $\dim\left(\mathrm{Ker}\,(f)\right) = 1$.

Un échelonnement en colonne de M permet de voir directement que $f\left(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}\right) = \overrightarrow{0}$ et par suite $\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} \in \mathrm{Ker}\,(f)$ et comme ce dernier est un vecteur non nul, il en forme une base puisque $\mathrm{Ker}\,(f)$ est une droite vectorielle. Ainsi : $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}\right)$.

2. En notant $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{u_2} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}$, il vient que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Un échelonnement en ligne de cette matrice permet de montrer que $\mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\right)\right) = 3$. Ainsi, $\mathcal{B}' = \left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\right)$ est une famille de 3 vecteurs de rang 3 dans un espace de dimension 3. Par théorème c'est donc une base de E.

Ainsi, en notant p le projecteur sur P parallèlement à D, la matrice de p dans $\mathcal{B}'$ sera : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\,(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En notant P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, il vient que : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,(f) = P \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\,(f) \times P^{-1}$

Or $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -7 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et ainsi, il vient que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,(f) = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

3. a. Décomposition d'un vecteur de E sur $\mathrm{Ker}\,(p) + \mathrm{Im}\,(p)$: soit $\overrightarrow{x} \in E$.

On a que : $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x} - p\left(\overrightarrow{x}\right) + p\left(\overrightarrow{x}\right)$.

Il est immédiat que $p\left(\overrightarrow{x}\right) \in \mathrm{Im}\,(f)$.

De plus : $p\left(\overrightarrow{x} - p\left(\overrightarrow{p}\right)\right) = p\left(\overrightarrow{x}\right) - f\left(p\left(\overrightarrow{x}\right)\right)$ et donc $\overrightarrow{x} - p\left(\overrightarrow{x}\right) \in \mathrm{Ker}\,(p)$.

$$\underset{\text{car } p \circ p}{=} p\left(\overrightarrow{x}\right) - \overrightarrow{p, x}$$
$$= \overrightarrow{0}$$

Ainsi, $\overrightarrow{x}$ est somme d'un élément de $\mathrm{Im}\,(p)$ et d'un élément de $\mathrm{Ker}\,(p)$.

On en déduit donc que $E \subset \mathrm{Ker}\,(p) + \mathrm{Im}\,(p)$. Comme $\mathrm{Ker}\,(p) + \mathrm{Im}\,(p)$ est un sous-espace de E, on en déduit $E = \mathrm{Ker}\,(p) + \mathrm{Im}\,(p)$.

Somme directe $ker(p) + \mathrm{Im}\,(p)$ **:** montrons que $\mathrm{Ker}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(p) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

Inclusion $\left\{\overrightarrow{0}\right\} \subset \mathrm{Ker}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(p)$ **:** puisque $\mathrm{Ker}\,(p)$ et $\mathrm{Im}\,(p)$ sont deus sous-espaces de E, leur intersection est un sous-espace de E, et par suite $\overrightarrow{0} \in \mathrm{Ker}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(p)$ ce qui assure que $\left\{\overrightarrow{0}\right\} \subset \mathrm{Ker}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(p)$.

Inclusion $\mathrm{Ker}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(p) \subset \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ **:** soit $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(p)$.

Comme $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Im}\,(p)$, il existe $\overrightarrow{u} \in E$ tel que $\overrightarrow{x} = p\left(\overrightarrow{u}\right)$.

Or $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}\,(p)$ donc $p\left(\overrightarrow{x}\right) = 0$. Ainsi, on en déduit que $p\left(p\left(\overrightarrow{u}\right)\right) = \overrightarrow{0}$. Or $\mathbb{P}\,(\circ)\,p = p$, donc $p\left(p\left(\overrightarrow{u}\right)\right) = p\left(\overrightarrow{u}\right)$ et donc $p\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{0}$ et ainsi $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

On en déduit donc que $\mathrm{Ker}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(p) \subset \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

En conséquence $\mathrm{Ker}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(p) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ et donc la somme $\mathrm{Ker}\,(p) + \mathrm{Im}\,(p)$ est directe.

En conclusion, $E = \mathrm{Ker}\,(p) \oplus \mathrm{Im}\,(p)$ et ainsi $\mathrm{Ker}\,(p)$ et $\mathrm{Im}\,(p)$ sont supplémentaires.

b. i. D'après la caractéristion des projecteurs, on sait que : (q est un projecteur de E) $\Leftrightarrow$ $\left(\forall x \in E,\, q\left(q\left(\overrightarrow{x}\right)\right) = q\left(\overrightarrow{x}\right)\right)$.

On a ici : $\forall \overrightarrow{x} \in E,\quad p\left(q\left(\overrightarrow{x}\right)\right) = (\mathrm{Id}_E - p)\left((\mathrm{Id}_E - p)\left(\overrightarrow{x}\right)\right)$

$$= (\mathrm{Id}_E - p)\left(\overrightarrow{x} - p\left(\overrightarrow{x}\right)\right)$$
$$= \mathrm{Id}_E\left(\overrightarrow{x}\right) - p\left(p\left(\overrightarrow{x}\right)\right)$$
$$\underset{\text{car } p \circ p = p}{=} \overrightarrow{x} - p\left(\overrightarrow{x}\right)$$
$$= q\left(\overrightarrow{x}\right)$$

et ainsi q est bien un projecteur.

ii. Noyau de q **:** par définition du noyau : $\left(\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}\,(q)\right) \Leftrightarrow \left(q\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0}\right)$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{x} - p\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(p\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{x}\right)$$
$$\underset{\substack{\text{car } p \\ \text{projecteur}}}{\Leftrightarrow} \left(\overrightarrow{x} \in \mathrm{Im}\,(p)\right)$$

et ainsi $\mathrm{Ker}\,(q) = \mathrm{Im}\,(p)$.

Image de q **:** puisque q est un projecteur, on sait que $\mathrm{Im}\,(q) = \left\{\overrightarrow{x} \in E,\, q\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{x}\right\}$.

Ainsi, il vient que : $\left(\overrightarrow{x} \in \mathrm{Im}\,(q)\right) \Leftrightarrow \left(q\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{x}\right)$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{x} - p\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{x}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(p\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}\,(p)\right)$$

et ainsi $\mathrm{Im}\,(q) = \mathrm{Ker}\,(p)$.

iii. Explicitation de $p \circ q$: on a directement que : $\forall \overrightarrow{x} \in E,\ p\left(q\left(\overrightarrow{x}\right)\right) = p\left(\overrightarrow{x} - p\left(\overrightarrow{x}\right)\right) = p\left(\overrightarrow{x}\right) - p\left(p\left(\overrightarrow{x}\right)\right) \underset{\text{car } p\circ p=p}{=} p\left(\overrightarrow{x}\right) - p\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0}$

et par suite $p \circ q = \tilde{0}_E$.

Explicitation de $q \circ p$: on a directement que : $\forall \overrightarrow{x} \in E,\ q\left(p\left(\overrightarrow{x}\right)\right) = p\left(\overrightarrow{x}\right) - p\left(p\left(\overrightarrow{x}\right)\right) \underset{\text{car } p\circ p=p}{=} p\left(\overrightarrow{x}\right) - p\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0}$

et par suite $q \circ p = \tilde{0}_E$.

c. i. On suppose donc que $p_1 \circ p_2 = \tilde{0}_E$.

D'après la caractérisation des projecteurs, on sait que : (q est un projecteur de E) $\Leftrightarrow$ ($q \circ q = q$)

Ainsi, en utilisant les règles de calcul sur les composées de combinaison linéaires d'applications linéaires, il vient :

$$\begin{aligned} q \circ q &= (p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1) \circ (p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1) \\ &= \underbrace{p_1 \circ p_1}_{=p_1} + \underbrace{p_1 \circ p_2}_{=\tilde{0}_E} - \underbrace{\underbrace{p_1 \circ p_2}_{=\tilde{0}_E} \circ p_1}_{=\tilde{0}_E} + p_2 \circ p_1 + \underbrace{p_2 \circ p_2}_{=p_2} - \underbrace{p_2 \circ p_2}_{=p_2} \circ p_1 - p_2 \circ \underbrace{p_1 \circ p_1}_{=p_1} - \underbrace{p_2 \circ \underbrace{p_1 \circ p_2}_{=\tilde{0}_E}}_{=\tilde{0}_E} + \underbrace{p_2 \circ \underbrace{p_1 \circ p_2}_{=\tilde{0}_E} \circ}_{=\tilde{0}_E} \\ &= p_1 + p_2 \circ p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1 - p_2 \circ p_1 \\ &= p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1 \\ &= q \end{aligned}$$

et ainsi q est bien un projecteur de E.

ii. Soit $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}\,(p_1) \cap \mathrm{Ker}\,(p_2)$. Alors on a : $q\left(\overrightarrow{x}\right) = \underbrace{p_1\left(\overrightarrow{x}\right)}_{\substack{=\overrightarrow{0} \\ \text{car } \overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}\,(p_1)}} + \underbrace{p_2\left(\overrightarrow{x}\right)}_{\substack{=\overrightarrow{0} \\ \text{car } \overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}\,(p_2)}} - p_2\big(\underbrace{p_1\left(\overrightarrow{x}\right)}_{=\overrightarrow{0}}\big) = \overrightarrow{0}$

et ainsi $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}\,(q)$. Par suite, on a donc $\mathrm{Ker}\,(p_1) \cap \mathrm{Ker}\,(p_2) \subset \mathrm{Ker}\,(q)$.

iii. Il reste à montrer l'inclusion $\mathrm{Ker}\,(q) \subset \mathrm{Ker}\,(p_1) \cap \mathrm{Ker}\,(p_2)$ pour avoir l'égalité entre ces deux ensembles.

Soit alors $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}\,(q)$. Alors $q\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0}$.

Ainsi $q\left(\overrightarrow{x}\right) = p_1\left(\overrightarrow{x}\right) + p_2\left(\overrightarrow{x}\right) - p_2\left(p_1\left(\overrightarrow{x}\right)\right)$ donne : $(\star)$: $\overrightarrow{0} = p_1\left(\overrightarrow{x}\right) + p_2\left(\overrightarrow{x}\right) - p_2 \circ p_1\left(\overrightarrow{x}\right)$.

Ainsi en composant $(\star)$ par p_1 à gauche, il vient que : $p_1\left(\overrightarrow{0}\right) = p_1\left(p_1\left(\overrightarrow{x}\right)\right) + p_1\left(p_2\left(\overrightarrow{x}\right)\right) - p_1\left(p_2 \circ p_1\left(\overrightarrow{x}\right)\right)$ ce qui donne $\overrightarrow{0} = p_1\left(\overrightarrow{x}\right)$ puisuqe $p_1\left(p_2\left(\overrightarrow{x}\right)\right) = \overrightarrow{0}$ et ainsi $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}\,(p_1)$.

Ainsi, $(\star)$ devient $\overrightarrow{0} = p_2\left(\overrightarrow{x}\right)$ puisque $p_1\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0}$ et donc $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}\,(p_2)$

Finalement $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}\,(p_1) \cap \mathrm{Ker}\,(p_2)$ ce qui assure que $\mathrm{Ker}\,(q) \subset \mathrm{Ker}\,(p_1) \cap \mathrm{Ker}\,(p_2)$.

EX. 4 | Réf. 4035

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1 et A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose par ailleurs qu'il existe deux matrices U et V de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et deux réels λ et μ tels que $\lambda \times \mu \neq 0$ et $\lambda \neq \mu$ tels que : $\begin{cases} A = \lambda U + \mu V \\ A^2 = \lambda^2 U + \mu^2 V \\ A^3 = \lambda^3 U + \mu^3 V \end{cases}$

1. Exprimer U et V en fonction de A et A^2.
En déduire que : $A^3 = (\lambda + \mu)\, A^2 - \lambda\mu A$

2. Montrer que, pour tout entier $p \geq 1$, $A^p = \lambda^p U + \mu^p V$.

3. Soient $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 2$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
On note $f^p = f \circ f \circ \ldots \circ f$ la pe composée de f.

a. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(f^p)$.

b. Montrer que tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda\mu f^{p-1}(x) = (\lambda+\mu)\, f^p(x) - f^{p+1}(x)$.

c. En déduire que $\mathrm{Ker}\,(f^p) \subset \mathrm{Ker}\,(f)$.

d. Montrer que $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(A^p)$.

EX. 4 | Éléments de correction | Réf. 4035

1. Il s'agit de résoudre le système linéaire d'inconnue le couple de matrices (U,V) : $\left\{\begin{array}{l}\lambda U + \mu V = A\\ \lambda^2 U + \mu^2 V = A^2\end{array}\right.$ et dont la représentation matricielle serait $\left(\begin{array}{cc|c}\lambda & \mu & A\\ \lambda^2 & \mu^2 & A^2\end{array}\right)$.

On remarquera tout d'abord que la condition $\lambda\mu \neq 0$ est équivalente à $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$.

Par échelonnement en ligne il vient :

$$\left(\begin{array}{cc|c}\lambda & \mu & A\\ \lambda^2 & \mu^2 & A^2\end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c}\lambda & \mu & A\\ 0 & \mu(\mu-\lambda) & A^2 - \lambda A\end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{\mu(\mu-\lambda)} L_2}{\sim_L}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}\lambda & \mu & A\\ 0 & 1 & \dfrac{1}{\mu(\mu-\lambda)}(A^2-\lambda A)\end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - \mu L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c}\lambda & 0 & \dfrac{1}{\mu-\lambda}(\mu A - A^2)\\ 0 & 1 & \dfrac{1}{\mu(\mu-\lambda)}(A^2-\lambda A)\end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_1}{\sim_L}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & \dfrac{1}{\lambda(\mu-\lambda)}(\mu A - A^2)\\ 0 & 1 & \dfrac{1}{\mu(\mu-\lambda)}(A^2-\lambda A)\end{array}\right)$$

On en déduit ainsi que $\left\{\begin{array}{l} U = \dfrac{1}{\lambda(\mu-\lambda)}(\mu A - A^2)\\ V = \dfrac{1}{\mu(\mu-\lambda)}(A^2-\lambda A)\end{array}\right.$.

Il vient alors que :
$$\begin{array}{rcl}
A^3 &=& \lambda^3 U + \mu^3 V\\
&=& \dfrac{\lambda^3}{\lambda(\mu-\lambda)}(\mu A - A^2) + \dfrac{\mu^3}{\mu(\mu-\lambda)}(A^2-\lambda A)\\
&=& \dfrac{\lambda^2}{\mu-\lambda}(\mu A - A^2) + \dfrac{\mu^2}{\mu-\lambda}(A^2-\lambda A)\\
&=& \dfrac{1}{\mu-\lambda}\left(\lambda^2\mu A - \lambda^2 A^2 - \lambda\mu^2 A + \mu^2 A^2\right)\\
&=& \dfrac{1}{\mu-\lambda}\left(\left(\mu^2-\lambda^2\right)A^2 - \lambda\mu(\lambda-\mu)A\right)\\
&=& \dfrac{1}{\mu-\lambda}\left((\mu-\lambda)(\mu+\lambda)A^2 - \lambda\mu(\lambda-\mu)A\right)\\
&=& (\lambda+\mu)A - \lambda\mu A
\end{array}$$

2. Pour tout $p \geq 1$, on pose : $\mathcal{P}(p)$: ´ $A^p = \lambda^p U + \mu^p V$ ˇ.

Montrons par récurrence double sur l'entier p que la proposition $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout entier $p \geq 1$.

Initialisation : les deux premières relations données par l'énoncé assure que $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$.

Hérédité : soit $p \geq 1$. Supposons que l'on ait $\mathcal{P}(p)$ et $\mathcal{P}(p+1)$. Montrons, sous cette hypothèse que l'on a $\mathcal{P}(p+2)$.

Il vient que :
$$\begin{array}{rcl}
A^{p+2} &=& A^{p-1} \times A^3\\
&=& A^{p-1}\left((\lambda+\mu)A^2 - \lambda\mu A\right)\\
&=& (\lambda+\mu)A^{p+1} - \lambda\mu A^p\\
&\underset{\text{H.R.}}{=}& (\lambda+\mu)\left(\lambda^{p+1}U + \mu^{p+1}V\right) - \lambda\mu\left(\lambda^p U + \mu^p V\right)\\
&=& \left(\lambda^{p+2} + \mu\lambda^{p+1} - \mu\lambda^{p+1}\right)U + \left(\lambda\mu^{p+1} + \mu^{p+2} - \lambda\mu^{p+1}\right)V\\
&=& \lambda^{p+2}U + \mu^{p+2}V
\end{array}$$

ce qui donne $\mathcal{P}(p+2)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(p)$ étant vraie aux rangs 1 et 2, et héréditaire d'ordre 2, par le principe de récurrence double, elle est vraie pour tout entier $p \geq 1$.

3. a. Soit $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}\,(f)$. Il vient que $f\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0}$. Par suite $f^{p-1}\left(f\left(\overrightarrow{x}\right)\right) = f^{p-1}\left(\overrightarrow{0}\right) = \overrightarrow{0}$ c'est à dire $f^p\left(\overrightarrow{x}\right) \in \mathrm{Ker}\,(f^p)$.

b. Il s'agit donc de montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda\mu f^{p-1}(x) - (\lambda+\mu)\, f^p(x) + f^{p+1}(x) = 0$, ce qui équivalent à dire que l'endomorphisme $f^{p+1} - (\lambda+\mu)\, f^p + \lambda\mu f^{p-1} = \tilde{0}_{\mathbb{R}^n}$.

Matriciellement, cela revient à établir que : $A^{p+1} - (\lambda+\mu)\,A^p + \lambda\mu A^{p-1} = (0)$.
Puisque $A^3 = (\lambda+\mu)\,A^2 - \lambda\mu A$, en multipliant cette relation par A^{p-2}, il vient que $A^{p+1} = (\lambda+\mu)\,A^p - \lambda\mu A^{p-1}$ ce qui est en fait l'égalité voulue.

c. Soit $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}\,(f^p)$. Il vient alors que $f^p\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0}$ ou encore que $f\left(f^{p-1}\left(\overrightarrow{x}\right)\right) = \overrightarrow{0}$.

Or d'après l'égalité précédente, on a puisque $\lambda\mu \neq 0$ que $f^{p-1}\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0}$. En formalisant ce processus descendant par une récurrence il vient alors que $f\left(\overrightarrow{x}\right) = 0$ et par suite que $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}\,(f)$ c'est à dire que $\mathrm{Ker}\,(f^p) = \mathrm{Ker}\,(f)$.

d. D'après le théorème du rang, on a : $\begin{cases} \dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\mathrm{Ker}\,(f)) + \mathrm{rg}\,(f) \\ \dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\mathrm{Ker}\,(f^p)) + \mathrm{rg}\,(f^p) \end{cases}$ et comme $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(f^p)$ il vient que $\mathrm{rg}\,(f) = \mathrm{rg}\,(f^p)$ ce qui donne bien que $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(A^p)$.