À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs... La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

Exercice| [4385] | 1| Reconnaître une loi géométrique

$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.
Soit X une variable aléatoire réelle discrète définie sur Ω telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
On suppose que la loi de X est donnée par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 3\mathbb{P}([X = n+2]) = 4\mathbb{P}([X = n+1]) - \mathbb{P}([X = n])$

(1). Démontrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([X = n]) = \alpha + \beta \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

(2). Déterminer (α, β) et expliciter alors la loi de X.

(3). Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = X + 1$.

(4). En déduire que X admet une espérance et une variance et en donner leurs valeurs.

Éléments de correction

(1). On définit la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = \mathbb{P}([X = n])$.
La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
L'équation caractértistique associée à cette dernière est l'équation $3r^2 - 4r + r = 0$ d'inconnue r, qui admet deux solutions $r_1 = 1$ et $r_2 = \frac{1}{3}$.

Par suite, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = \alpha (1)^2 + \beta \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Finalement : $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{P}([X = n]) = \alpha + \beta \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

(2). Puisque X est une variable aléatoire discrète, on doit avoir :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X = n]) \geq 0 \\ \text{La série numérique } \sum \mathbb{P}([X = n]) \text{ est convergente et a pour somme } 1 \end{cases}.$$

Soit alors $N \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}([X = n]) &= \sum_{n=0}^{N} \left(\alpha + \beta \times \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{N} \alpha + \beta \times \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \alpha(N+1) + \beta \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{N+1}}{1 - \frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Puisque $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$, on en déduit que $\beta \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{N+1}}{1 - \frac{1}{3}} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \beta \times \frac{3}{2}$.

Par ailleurs, $\alpha(N+1) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$ selon le signe de α.

Par conséquent, la suite des sommes partielles $\left(\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}([X = n])\right)_{N\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie si, et seulement si, $\alpha = 0$.
Cette limite est alors égale à $\beta \times \frac{3}{2}$.

Sous l'hypothèse $\alpha = 0$, la somme de la série numérique $\sum \mathbb{P}([X = n])$ est donc égale à $\beta \times \frac{3}{2}$. Par suite, on doit avoir $\beta = \frac{2}{3}$ puisque la somme de la série numérique $\sum \mathbb{P}([X=n])$ est égale à 1.

On en déduit donc que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([X=n]) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

(3). **Support de Y :** puisque $X(\Omega) = \mathbb{N}$, il vient que $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ étant donné que $Y = X+1$.

Loi de Y : soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y=k]) &= \mathbb{P}([X+1=k]) \\ &= \mathbb{P}([X=k-1]) \\ &= \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \\ &= \left(1-\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Reconnaissance de la loi de Y : puisque $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on en déduit alors que Y suit une loi géométrique de paramètre $\frac{2}{3}$.

(4). Y étant une variable aléatoire qui suit une loi géométrique, elle admet une espérance et une variance qui sont telles que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \frac{1}{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} \mathbb{V}(Y) &= \frac{1-\frac{2}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Puisque $X = Y-1$ et que Y admet une espérance, par linéarité de l'espérance, X admet un espérance et on a : $$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(Y-1) \\ &= \mathbb{E}(Y) - 1 \\ &= \frac{3}{2} - 1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

De même, Y admettant une variance, X admet une variance et on a : $$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{V}(Y-1) \\ &= \mathbb{V}(Y) \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [1311] | 2| Étude d'un couple de variables aléatoires discrètes

Dans cet exercice, on admet que, pour tout entier naturel k fixé et tout réel $x \in]-1;1[$, la série de terme général $\binom{n}{k} x^{n-k}$ converge et que $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6.
On lance ce dé jusqu'à obtenir un 6.
On rappelle que l'on désigne par « obtenir l'as » le fait d'obtenir la face numérotée 1 lors d'un lancer.
On désigne par X le nombre de lancers nécessaires et on désigne par Y le nombre d'as obtenus avant le premier 6.

(1). Quelle est la loi de X ?

(2). Déterminer $Y(\Omega)$.

(3). Soit $i \in X(\Omega)$ et $j \in Y(\Omega)$. Déterminer $\mathbb{P}_{[X=i]}([Y=j])$.

(4).(a). Soit $i \in X(\Omega)$ et $j \in Y(\Omega)$. Déterminer $\mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j])$.

(b). Déterminer la loi de Y.

(c). Soit $Z = Y+1$. Reconnaître la loi de Z et en déduire l'espérance et la variance de Y.

Éléments de correction

(1). Support de X : on peut obtenir la face numérotée « six » dès le premier lancer, comme devoir lancer le dé indéfiniement. Ainsi $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Loi de X : on désigne par S_i : « le i^{e} lancer a donné un six ».

Soit alors $k \in X(\Omega)$. On a : $[X=k] = \begin{cases} S_1 \text{ si } k=1 \\ \overline{S_1} \cap \ldots \cap \overline{S_{k-1}} \cap S_k \text{ si } k \geq 2 \end{cases}$.

On peut supposer le résultat des lancers indépendants les uns des autres, de sorte que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=k]) &= \begin{cases} \dfrac{1}{6} \text{ si } k=1 \\ \mathbb{P}\left(\overline{S_1} \cap \ldots \cap \overline{S_{k-1}} \cap S_k\right) \text{ si } k \geq 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{6} \text{ si } k=1 \\ \mathbb{P}\left(\overline{S_1}\right) \times \ldots \times \mathbb{P}\left(\overline{S_{k-1}}\right) \times \mathbb{P}(S_k) \text{ si } k \geq 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{6} \text{ si } k=1 \\ \underbrace{\dfrac{5}{6} \times \ldots \times \dfrac{5}{6}}_{k-1 \text{ facteurs}} \times \dfrac{1}{6} \text{ si } k \geq 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{6} \text{ si } k=1 \\ \left(\dfrac{5}{6}\right)^{k-1} \times \dfrac{1}{6} \text{ si } k \geq 2 \end{cases} \\
&= \left(\dfrac{5}{6}\right)^{k-1} \times \dfrac{1}{6}
\end{aligned}$$

Reconnaissance de la loi de X : on en déduit donc que X suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{6}$.

(2). Si le six est obtenu dès le premier lancer, Y prend la valeur 0. Le fait que le six ne soit jamais obtenu, n'empêche pas d'obtenir l'as. Ainsi, $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

(3). Deux cas de figures se présentent :

Si $j < i$: il s'agit donc de déterminer le nombre de fois que l'on peut obtenir j lancers ayant donnés l'as lors de $i-1$ lancers. Les lancers pouvant être supposé réalisés de manière indépendantes, on en déduit que la loi conditionnelle de Y sachant l'événement $[X=i]$ est une loi binomiale, c'est à dire que : $\mathbb{P}_{[X=i]}([Y=j]) = \dbinom{i-1}{j}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{j}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{i-j-1}$.

Si $j \geq i$: il ne peut y avoir plus d'as que de lancers réalisés, donc $\mathbb{P}_{[X=i]}([Y=j]) = 0$.

Ainsi, il vient : $\mathbb{P}_{[X=i]}([Y=j]) = \begin{cases} \dbinom{i-1}{j}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{j}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{i-j-1} \text{ si } j<i \\ 0 \text{ si } j \geq i \end{cases}$

(4).(a). D'après la formule des probabilités composées, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) &= \mathbb{P}([X=i]) \times \mathbb{P}_{[X=i]}([Y=j]) \\
&= \mathbb{P}([X=i]) \times \begin{cases} \dbinom{i-1}{j}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{j}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{i-j-1} \text{ si } j<i \\ 0 \text{ si } j \geq i \end{cases} \\
&= \left(\dfrac{5}{6}\right)^{i-1} \times \dfrac{1}{6} \times \begin{cases} \dbinom{i-1}{j}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{j}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{i-j-1} \text{ si } j<i \\ 0 \text{ si } j \geq i \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left(\dfrac{5}{6}\right)^{i-1} \times \dfrac{1}{6}\dbinom{i-1}{j}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{j}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{i-j-1} \text{ si } j<i \\ 0 \text{ si } j \geq i \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dbinom{i-1}{j}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{j+1}\left(\dfrac{4}{6}\right)^{i-j-1} \text{ si } j<i \\ 0 \text{ si } j \geq i \end{cases}
\end{aligned}$$

(b). Soit alors $j \in Y(\Omega)$. Les événements $([X=i])_{i \in X(\Omega)}$ forment un système complet d'événements de probabilités non nulles. Il vient alors :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y=j]) &= \sum_{i\in X(\Omega)} \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \underbrace{\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j])}_{=0 \text{ si } j\geq i} \\
&= \sum_{i=j+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) \\
&= \sum_{i=j+1}^{+\infty} \binom{i-1}{j}\left(\frac{1}{6}\right)^{j+1}\left(\frac{4}{6}\right)^{i-j-1} \\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^{j+1}\sum_{i=j+1}^{+\infty} \binom{i-1}{j}\left(\frac{4}{6}\right)^{i-j-1} \\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^{j+1}\sum_{i=j}^{+\infty} \binom{i}{j}\left(\frac{4}{6}\right)^{i-j} \\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^{j+1}\times\frac{1}{\left(1-\frac{4}{6}\right)^{j+1}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{j+1}
\end{aligned}
$$

(c). Support de Z : puisque $Y(\Omega)=\mathbb{N}$, il vient que $Z(\Omega)=\mathbb{N}^*$.

Loi de Z : soit $k\in Z(\Omega)=\mathbb{N}^*$.

On a donc :
$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}([Z=k]) &= \mathbb{P}([Y+1=k]) \\
&= \mathbb{P}([Y=k-1]) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{(k-1)+1} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\times\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Par suite, on reconnaît que Z suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. Elle admet donc une espérance et une variance qui valent respectivement :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \frac{1}{\frac{1}{2}} \\
&= 2
\end{aligned}
\qquad \text{et} \qquad
\begin{aligned}
\mathbb{V}(Z) &= \frac{1-\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \\
&= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Ainsi, puisque $Y=Z-1$, Y admet une espérance où par linéarité de l'espérance on a : $\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(Z)-1 \\ &= 1\end{aligned}$.

De même, puisque Z admet une variance, Y admet une variance où l'on a : $\begin{aligned}\mathbb{V}(Y) &= \mathbb{V}(Z) \\ &= 1\end{aligned}$