À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs... La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

Exercice| [2320] | 1| Suites et sommes

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k(k+1)(k+2)}$.

(1). Déterminer trois réels a, b et c tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{4}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$.

(2). Simplifier alors l'expression de u_n.

(3). En déduire la limite de $(u_n)_{n\geq 1}$.

Éléments de correction

(1). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2} &= \frac{a(n+1)(n+2) + bn(n+2) + cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{an^2 + 3an + 2a + bn^2 + 2bn + cn^2 + cn}{n(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n^2(a+b+c) + n(3a+2b+c) + 2a}{n(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

Par identification avec le numérateur du quotient $\dfrac{4}{n(n+1)(n+2)}$, il vient le système : $\begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ 2a=4 \end{cases}$ qui conduit à $a=2$, $b=-4$ et $c=2$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{4}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{2}{n} - \dfrac{4}{n+1} + \dfrac{2}{n+2}$

(2). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
u_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{k} - \frac{4}{k+1} + \frac{2}{k+2} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{k} - \frac{2}{k+1} \right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{k+2} - \frac{2}{k+1} \right) \\
&= \left(\frac{2}{1} - \frac{2}{n+1} \right) + \left(\frac{2}{n+2} - \frac{2}{2} \right) \\
&= 1 + \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+1}
\end{aligned}$$

(3). Puisque $\dfrac{2}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{2}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il vient par somme que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [2394] | 2| Calcul matriciel

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles vérifiant les relations :

$$a_0 = 1,\ b_0 = 2,\ c_0 = 7 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 3b_n + c_n \\ c_{n+1} = 3c_n \end{cases}$$

On souhaite exprimer a_n, b_n et c_n uniquement en fonction de n. Dans tout ce qui suit, on note X_n la matrice colonne

$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ où $n \in \mathbb{N}$..

(1). Trouver une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$.

(2). Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

(3). Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^2, N^3, puis N^p pour $p \geq 3$.

(4). Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ A^n = 3^n I_3 + 3^{n-1}nN + 3^{n-2}\dfrac{n(n-1)}{2}N^2$.

(5). En déduire a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Éléments de correction

(1). En remarquant quee $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_n + b_n \\ 3b_n + c_n \\ 3c_n \end{pmatrix}$, il vient que $X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(2). Soit $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{P}(n)$:« $X_n = A^n X_0$ ».
Montrons par récurrence sur l'entier n que la propositon $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Initialisation au rang 0 : Par définition $A^0 = \mathrm{I}_3$ et par suite $A^0 X_0 = \mathrm{I}_3 X_0$ ce qui donne $A^0 X_0 = X_0$ ce qui est bien $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, et montrons que, sous cette hypothèse, on a $\mathcal{P}(n+1)$.
D'après la question précédente, $X_{n+1} = AX_n$. Or par hypothèse de récurrence, on a $X_n = A^n X_0$. Ainsi, il vient que $X_{n+1} = AA^n X_0$ et ainsi $X_{n+1} = A^{n+1}X_0$, ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier n.

(3). On obtient directement que $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et par suite $N^p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour tout entier $p \geq 3$.

(4). On remarque que $A = N + 3\mathrm{I}_3$ avec $(3\mathrm{I}_3)N = N(3\mathrm{I}_3)$. Par suite, d'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned}
A^n &= (N + 3\mathrm{I}_3)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k (3\mathrm{I}_3)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} N^k \\
&= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} 3^{n-k} N^k \\
&= \binom{n}{0} 3^n N^0 + \binom{n}{1} 3^{n-1} N + \binom{n}{2} 3^{n-2} N^2 \\
&= 3^n \mathrm{I}_3 + n3^{n-1}N + 3^{n_2}\frac{n(n-1)}{2}N^2
\end{aligned}$$

(5). On en déduit donc que $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & 3^{n-2}\dfrac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

Par suite $X_n = A^n X_0$ donne $X_n = \begin{pmatrix} 3^n + 2n3^{n-1} + \dfrac{7 \times 3^{n-2} n(n-1)}{2} \\ 2 \times 3^n + 7n3^{n-1} \\ 7 \times 3^n \end{pmatrix}$ qui donnera que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_n = 3^n + 2n3^{n-1} + \dfrac{7 \times 3^{n-2} n(n-1)}{2} \\ b_n = 2 \times 3^n + 7n3^{n-1} \\ c_n = 7 \times 3^n \end{cases}$$