Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question. . . **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1| Réf. 2363

Soit P la fonction polynôme de degré 3 définie sur $\mathbb{R}$ par $P(X) = -10X^3 - 23X^2 + 65X - 12$.

1. Vérifier que -4 est racine de P.
2. Justifier alors l'eXistence de trois réels a, b et c tels que, pour tout $X \in \mathbb{R}$, $P(X) = (X+4)\left(aX^2 + bX + c\right)$, puis les déterminer.
3. Déduire des questions précédentes :
   a. La résolution de l'équation $P(X) = 0$;
   b. Une factorisation de $P(X)$ sous forme d'un produit de 3 fonctions affines ;
   c. La résolution de l'inéquation $P(X) \geq 0$.

EX. 2| Réf. 2653

On pose, pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$:

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)}$$

1. Déterminer une primitive sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ de la fonction $f + g$.
2. Déterminer une primitive sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ de la fonction $f - g$.
3. En déduire alors les primitives de f et g sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.
4. Déterminer alors la primitive de f qui vaut 1 en 0.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3| Réf. 2369

On se propose dans cet exercice d'expliciter les **schémas de Hörner** pour les calculs de valeurs ou sa factorisation d'un polynôme de degré 3. Dans tout ce qui suit :

- P est le polynôme défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $P(x) = \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$ où $(\alpha_0, \ldots, \alpha_3) \in \mathbb{R}^4$.
- a est un réel quelconque fixé.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = ((\alpha_3 x + \alpha_2)\, x + \alpha_1)\, x + \alpha_0$.
   Cette transformation d'écriture s'appelle le **schéma de Hörner** du polynôme P.
2. Soit A le polynôme défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $A(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x - 5$.
   Donner le **schéma de Hörner** de ce polynôme A.
3. On pose : $\begin{cases} h_3 = \alpha_3 \\ h_2 = \alpha_2 + a \times h_3 \\ h_1 = \alpha_1 + a \times h_2 \\ h_0 = \alpha_0 + a \times h_1 \end{cases}$.
   a. Montrer que $P(a) = h_0$.
   b. Qu'en déduit-on si $h_0 = 0$ pour le polynôme P ?
   c. Expliciter pour le polynôme A précédent les valeurs de h_3, h_2, h_1 et h_0 lorsque $a = 5$ puis en déduire la valeur de $A(5)$ par cette méthode.

4. Dans cette question, on cherche le polynôme Q tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-a) \times Q(x) + P(a)$.

a. On considère le polynôme G défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $G(x) = P(x) - P(a)$.
Justifier que G est factorisable par $(x-a)$.

b. En déduire alors que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = h_3x^2 + h_2x + h_1$

c. Expliciter alors le polynôme Q pour le polynôme A de la question précédente.

5. Le calcul des coefficients h_3, h_2, h_1 et h_0 peut s'illustrer avec le processus algorithmique suivant :

$$\begin{array}{cccc} \alpha_3 & \alpha_2 + a \times \alpha_3 & \alpha_1 + a \times h_2 & \alpha_0 + a \times h_1 \\ \alpha_3 & h_2 & h_1 & h_0 \end{array}$$

L'utiliser pour factoriser les deux polynômes suivants :

a. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_1(x) = 5x^3 - 11x^2 - 3x - 27$ sachant que 3 est racine de P_1 ;

b. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_2(x) = -x^3 + x^2 + 16x + 20$ sachant que 5 est racine de P_2.

Le schéma de Hörner et ces deux applications s'étendent à des polynômes de degré quelconque.