

## Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution.**

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

## Un peu de technique

## EX. 1 | Réf. 2363

Soit  $P$  la fonction polynôme de degré 3 définie sur  $\mathbb{R}$  par  $P(X) = -10X^3 - 23X^2 + 65X - 12$ .

- Vérifier que  $-4$  est racine de  $P$ .
- Justifier alors l'existence de trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que, pour tout  $X \in \mathbb{R}$ ,  $P(X) = (X + 4)(aX^2 + bX + c)$ , puis les déterminer.
- Déduire des questions précédentes :
  - La résolution de l'équation  $P(X) = 0$ ;
  - Une factorisation de  $P(X)$  sous forme d'un produit de 3 fonctions affines;
  - La résolution de l'inéquation  $P(X) \geq 0$ .

## EX. 2 | Réf. 2653

On pose, pour tout  $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$  :

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)}$$

- Déterminer une primitive sur  $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$  de la fonction  $f + g$ .
- Déterminer une primitive sur  $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$  de la fonction  $f - g$ .
- En déduire alors les primitives de  $f$  et  $g$  sur  $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ .
- Déterminer alors la primitive de  $f$  qui vaut 1 en 0.

## Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

## EX. 3 | Réf. 2369

On se propose dans cet exercice d'explicitier les **schémas de Hörner** pour les calculs de valeurs ou sa factorisation d'un polynôme de degré 3. Dans tout ce qui suit :

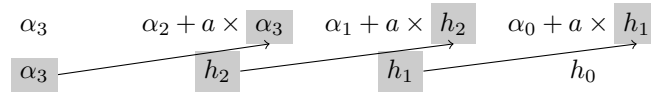
- $P$  est le polynôme défini pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $P(x) = \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$  où  $(\alpha_0, \dots, \alpha_3) \in \mathbb{R}^4$ .
- $a$  est un réel quelconque fixé.

- Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P(x) = ((\alpha_3 x + \alpha_2)x + \alpha_1)x + \alpha_0$ .  
Cette transformation d'écriture s'appelle le **schéma de Hörner** du polynôme  $P$ .
- Soit  $A$  le polynôme défini pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $A(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x - 5$ .  
Donner le **schéma de Hörner** de ce polynôme  $A$ .

$$3. \text{ On pose : } \begin{cases} h_3 = \alpha_3 \\ h_2 = \alpha_2 + a \times h_3 \\ h_1 = \alpha_1 + a \times h_2 \\ h_0 = \alpha_0 + a \times h_1 \end{cases}$$

- Montrer que  $P(a) = h_0$ .
- Qu'en déduit-on si  $h_0 = 0$  pour le polynôme  $P$ ?
- Expliciter pour le polynôme  $A$  précédent les valeurs de  $h_3$ ,  $h_2$ ,  $h_1$  et  $h_0$  lorsque  $a = 5$  puis en déduire la valeur de  $A(5)$  par cette méthode.

4. Dans cette question, on cherche le polynôme  $Q$  tel que :  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x - a) \times Q(x) + P(a)$ .
- a. On considère le polynôme  $G$  défini pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $G(x) = P(x) - P(a)$ .  
Justifier que  $G$  est factorisable par  $(x - a)$ .
- b. En déduire alors que :  $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = h_3x^2 + h_2x + h_1$
- c. Expliciter alors le polynôme  $Q$  pour le polynôme  $A$  de la question précédente.
5. Le calcul des coefficients  $h_3, h_2, h_1$  et  $h_0$  peut s'illustrer avec le processus algorithmique suivant :



L'utiliser pour factoriser les deux polynômes suivants :

- a. pour tout  $x \in \mathbb{R}, P_1(x) = 5x^3 - 11x^2 - 3x - 27$  sachant que 3 est racine de  $P_1$  ;
- b. pour tout  $x \in \mathbb{R}, P_2(x) = -x^3 + x^2 + 16x + 20$  sachant que 5 est racine de  $P_2$ .

*Le schéma de Hörner et ces deux applications s'étendent à des polynômes de degré quelconque.*