Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 4016

On se propose dans cet exercice de résoudre l'équation aux dérivées partielles suivantes : $(\star)$: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{y}{1+x^2}$

1. **Question préliminaire :**
   - **a.** À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^x \arctan(t)\,\mathrm{d}t$ où $x \in \mathbb{R}$.
   - **b.** En déduire les primitives de la fonction $x \longmapsto \arctan(x)$.
2. En remarquant que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{y}{1+x^2} = y \times \dfrac{1}{1+x^2}$, déterminer alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ pour f solution de $(\star)$.
3. En déduire alors les solutions de $(\star)$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4017

Dans tout cet exercice, E désigne un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On rappelle que l'on note $f^2 = f \circ f$.

1. Soit $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Im}(f) & \longrightarrow & E \\ \overrightarrow{x} & \longmapsto & f\left(\overrightarrow{x}\right) \end{array} \right.$ la restriction de f à $\mathrm{Im}(f)$.
   - **a.** Justifier que : $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$.
   - **b.** Montrer que $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}\left(f^2\right)$.
   - **c.** En déduire que : $\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}\left(f^2\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)\right)$.
2. Montrer que : $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(f^2\right)\right) - \dim\left(\mathrm{Ker}(f)\right) = \mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}\left(f^2\right)$.
3. En déduire l'équivalence : $\left(\mathrm{Im}\left(f^2\right) = \mathrm{Im}(f)\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\mathrm{Ker}\left(f^2\right) = \mathrm{Ker}(f)\right)$.
4. Montrer alors que : $\left(\mathrm{Im}\left(f^2\right) = \mathrm{Im}(f)\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)\right)$.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 1216

L'objet de ce problème consiste en l'étude d'endomorphismes u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie qui satisfont la propriété suivante :

$$(\star) : \quad \text{il existe } p \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } u^{p-1} \neq 0 \text{ et } u^p = 0$$

Partie A - Un premier exemple

On considère l'application Δ définie par :

$$\Delta : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_1[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$$

où $\mathbb{R}_1[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 1.

1. Rappelez la dimension de $\mathbb{R}_1[X]$ et en donner une base. On ne demande pas de justifier.
2. Vérifier que Δ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$.

3. Montrer que Δ vérifie la propriété $(\star)$ et préciser la valeur de l'entier p correspondant.

Partie B - Étude pour $\dim E = 3$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à 3, et soit u endomorphisme de E tel que $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$.
On se propose ici de déterminer le rang de l'endomorphisme u, à savoir la dimension de $\operatorname{Im} f$.
Dans toute la suite de cette partie, a désignera un élément de E tel que $u^2(a) \neq 0$. On pourra remarquer qu'un tel a existe bien. . . .

1. Montrer que la famille $\big(a, u(a), u^2(a)\big)$ est libre dans E.
2. En déduire une base de E.
3. Montrer alors que $\big(u(a), u^2(a)\big)$ est une famille libre d'éléments de $\operatorname{Im} u$.
4. Pourquoi $\operatorname{rg} u \geq 2$?
5. Montrer que u n'est pas injective.
6. En déduire le rang de u.

Partie C - Noyaux itérés et ordre de nilpotence

On se place dans le cas où E est un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.
Soit u un endomorphisme qui vérifie la propriété $(\star)$, à savoir tel qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^{p-1} \neq 0$ et $u^p = 0$.
L'objet de cette partie est d'établir que l'on a $u^n = 0$.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Ker}\left(u^k\right) \subset \operatorname{Ker}\left(u^{k+1}\right)$.
2. Montrer que si $\operatorname{Ker} u = \{0\}$, alors pour tout entier $k \geq 1$, on a $\operatorname{Ker} u^{k+1} = \{0\}$.
3. Quelle est la dimension maximale pour $\operatorname{Ker} u^k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$? Justifier.
4. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général α_n est défini pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $\alpha_n = \dim\left(\operatorname{Ker} u^k\right)$, est constante à partir d'un certain rang p_0.
5. Justifier que $p_0 \leq n$.
6. En déduire que $u^n = 0$.