Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question… **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

Exercice| [3618] | 1| Développements limités

Montrer que : $$\frac{1}{x\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{12}-\frac{x^2}{720}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [2194] | 2| Développement limité

Soit f la fonction définie par :

$$f:\left|\begin{array}{ccc}\left]0;\frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \frac{1}{x}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)\end{array}\right.$$

On se propose dans cet exercice d'étudier le comportement de f au voisinage de 0.

(1). Obtention d'un développement limité en 0 de f :

(a). Former le développement limité à l'ordre 6 en 0 de la fonction $x\longmapsto \sin(x)$.

(b). En déduire le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction $x\longmapsto \frac{\sin(x)}{x}$.

(c). Montrer alors que : $$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)=-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{180}x^4+\underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right).$$

(d). En déduire le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction f.

(2). Comportement de f en 0 :

À l'aide du développement limité de f obtenu précédemment :

(a). Déterminer la limite lorsque en 0^+ de f et en déduire que f est prolongeable par continuité en 0. Préciser alors la valeur de $f(0)$.

(b). Donner une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

(c). Étudier la position de la courbe représentative de f par rapport à $\mathcal{T}$ au point d'abscisse 0.