Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

Exercice| [1224] | 1| Puissance de matrices

Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A + N$.

(1). Pour quelles valeurs de a, la matrice B est-elle inversible ? Calculer alors B^{-1} pour ces valeurs de a.

(2). Vérifier que $AN = NA$ et $N^3 = (0)$.

(3). Montrer par récurrence sur l'entier p que : $\forall p \in \mathbb{N},\ A^p = a^p \mathrm{I}_3$.

(4). Exprimer B^n pour tout entier $n \geq 2$, en fonction de I_3, N et N^2.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [2195] | 2| Matrices inversibles et puissances de matrices

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(1). Calculer M^2 puis $M^2 + M - 2\mathrm{I}_3$.

(2). En déduire que M est inversible et calculer M^{-1}.

(3). Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

(4). On pose $Q = P^{-1}MP$.

- **(a).** Montrer par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PQ^nP^{-1}$.
- **(b).** Calculer Q, Q^2, Q^3 et Q^4.
- **(c).** Conjecturer une expression de Q^n où $n \in \mathbb{N}$.
  Justifier votre réponse par récurrence.
- **(d).** En déduire M^n pour $n \in \mathbb{N}$ que l'on explicitera.