Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2363

Soit P la fonction polynôme de degré 3 définie sur $\mathbb{R}$ par $P(X) = -10X^3 - 23X^2 + 65X - 12$.

1. Vérifier que -4 est racine de P.
2. Justifier alors l'eXistence de trois réels a, b et c tels que, pour tout $X \in \mathbb{R}$, $P(X) = (X+4)\left(aX^2 + bX + c\right)$, puis les déterminer.
3. Déduire des questions précédentes :
   a. La résolution de l'équation $P(X) = 0$;
   b. Une factorisation de $P(X)$ sous forme d'un produit de 3 fonctions affines ;
   c. La résolution de l'inéquation $P(X) \geq 0$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2363

1. Calculer $P(-4)$.
2. Procéder à une identification pour déterminer les différents coefficients a, b et c.
3. a. C'est une équation produit...
   b. Il reste une partie à factoriser...
   c. C'est une étude de signe à faire.

EX. 2 | Réf. 2653

On pose, pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$:

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)}$$

1. Déterminer une primitive sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ de la fonction $f + g$.
2. Déterminer une primitive sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ de la fonction $f - g$.
3. En déduire alors les primitives de f et g sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.
4. Déterminer alors la primitive de f qui vaut 1 en 0.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2653

1. Expliciter $f + g$ et remarquer que la fonction obtenue est très simple à primitiver...
2. Expliciter $f - g$ et essayer de trouver un lien entre le numérateur et le dénominateur du quotient obtenu pour en déduire la primitive demandée.
3. En notant F et G les primitives respectives de f et g, on obtient donc un système d'inconnue les fonctions F et G qu'il suffit alors de résoudre.
4. On détermine la valeur de la constante de primitivation à l'aide de la condition proposée.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2369

On se propose dans cet exercice d'expliciter les **schémas de Hörner** pour les calculs de valeurs ou sa factorisation d'un polynôme de degré 3. Dans tout ce qui suit :

- P est le polynôme défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $P(x) = \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$ où $(\alpha_0, \ldots, \alpha_3) \in \mathbb{R}^4$.
- a est un réel quelconque fixé.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = ((\alpha_3 x + \alpha_2)\, x + \alpha_1)\, x + \alpha_0$.
Cette transformation d'écriture s'appelle le **schéma de Hörner** du polynôme P.

2. Soit A le polynôme défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $A(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x - 5$.
Donner le **schéma de Hörner** de ce polynôme A.

3. On pose : $\begin{cases} h_3 = \alpha_3 \\ h_2 = \alpha_2 + a \times h_3 \\ h_1 = \alpha_1 + a \times h_2 \\ h_0 = \alpha_0 + a \times h_1 \end{cases}$.

- **a.** Montrer que $P(a) = h_0$.
- **b.** Qu'en déduit-on si $h_0 = 0$ pour le polynôme P ?
- **c.** Expliciter pour le polynôme A précédent les valeurs de h_3, h_2, h_1 et h_0 lorsque $a = 5$ puis en déduire la valeur de $A(5)$ par cette méthode.

4. Dans cette question, on cherche le polynôme Q tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x - a) \times Q(x) + P(a)$.

- **a.** On considère le polynôme G défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $G(x) = P(x) - P(a)$.
Justifier que G est factorisable par $(x - a)$.
- **b.** En déduire alors que : $\forall x \in \mathbb{R},\quad Q(x) = h_3 x^2 + h_2 x + h_1$
- **c.** Expliciter alors le polynôme Q pour le polynôme A de la question précédente.

5. Le calcul des coefficients h_3, h_2, h_1 et h_0 peut s'illustrer avec le processus algorithmique suivant :

$$\begin{array}{cccc} \alpha_3 & \alpha_2 + a \times \boxed{\alpha_3} & \alpha_1 + a \times \boxed{h_2} & \alpha_0 + a \times \boxed{h_1} \\ \boxed{\alpha_3} & \boxed{h_2} & \boxed{h_1} & h_0 \end{array}$$

L'utiliser pour factoriser les deux polynômes suivants :

- **a.** pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_1(x) = 5x^3 - 11x^2 - 3x - 27$ sachant que 3 est racine de P_1 ;
- **b.** pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_2(x) = -x^3 + x^2 + 16x + 20$ sachant que 5 est racine de P_2.

Le schéma de Hörner et ces deux applications s'étendent à des polynômes de degré quelconque.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2369

1. Développer l'expression proposée et s'apercevoir que l'on obtient bien celle de P initialement donnée.

2. Transposer simplement la factorisation précédente au polynôme A proposé.

3.
- **a.** Expliciter $P(a)$ à partir du schéma de Hörner de P en faisant apparaître sucessivement h_3, h_2, h_1 puis h_0.
- **b.** Comment traduit-on l'information $P(a) = 0$?
- **c.** Déterminer les valeurs de h_3, h_2, h_1 et h_0 avec les relations proposées pour les valeurs numériques des coefficients du polynôme A et la valeur de a données.

4.
- **a.** Quel est le lien entre une possible factorisation de $G(x)$ par $(x - a)$ et ce que représente alors a pour G ?
- **b.** C'est une simple réécriture du schéma de Hörner.
- **c.** Le faire ensuite pour le polynôme A.

5.
- **a.** Reproduire le schéma proposé avec les valeurs numériques associées au polynôme P_1 proposé et faire les calculs.
- **b.** Reproduire le schéma proposé avec les valeurs numériques associées au polynôme P_2 proposé et faire les calculs.