Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Pratique calculatoire

EX. 1 | Réf. 4016

On se propose dans cet exercice de résoudre l'équation aux dérivées partielles suivantes : $(\star)$: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{y}{1+x^2}$

1. **Question préliminaire :**
   a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^x \arctan(t)\,\mathrm{d}t$ où $x \in \mathbb{R}$.
   b. En déduire les primitives de la fonction $x \longmapsto \arctan(x)$.
2. En remarquant que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{y}{1+x^2} = y \times \dfrac{1}{1+x^2}$, déterminer alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ pour f solution de $(\star)$.
3. En déduire alors les solutions de $(\star)$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4016

1. **a.** C'est toujours la même astuce : $\arctan(x) = 1 \times \arctan(x)$.
   b. La réponse se déduit de la question précédente directement.
2. On est donc en mesure de connaître $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ puisque dans ce cas il suffit de primitiver l'expression à y constant.
3. On primitive de nouveau à y constant en se servant de la question préliminaire.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 3918

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
On désigne par Γ l'arc paramétré du plan dont un paramétrage est :

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = 4\cos^2(t)\sin^3(t) \\ y(t) = \big(3 - 2\cos^2(t)\big)\cos^2(t) \end{cases}$$

1. Montrer que l'on peut restreindre l'étude de Γ à l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ et préciser l'ensemble des transformations géométriques à faire opérer de sorte à reconstituer tout Γ.
2. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x'(t) = 2\sin^2(t)\cos(t)\,[1 + 5\cos(2t)] \\ y'(t) = 2\cos(3t)\sin(t) \end{cases}$
   On peut admettre la question et poursuivre.
3. Construire le tableau des variations conjointes de x et y sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, et préciser les vecteurs dirigeant les tangentes aux points de paramètre $t = 0$ et $t = \dfrac{\pi}{2}$, ainsi que les points à tangentes horizontales et verticales.
4. Construire alors Γ.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3918

1. Discussions classiques...périodicité, parité/imparité de x et y pour obtenir l'intervalle $[0; \pi]$ sur lequel on cherche encore des éléments de symétrie avec $x(\pi - t)$ et $y(\pi - t)$.

2. On dérive sans se tromper et on utilise au maximum les relations trigonométriques pour aboutir aux formes proposées.
3. On analyse les deux expressions de $x'(t)$ et $y'(t)$ pour dégager les facteurs qui en donnent le signe sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et pour lesquels on en fait l'étude proprement !
4. On procède au tracé en ayant au préalable positionné les points et les tangentes identifiées précédemment.