Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 4016

On se propose dans cet exercice de résoudre l'équation aux dérivées partielles suivantes : $(\star)$: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{y}{1+x^2}$

1. **Question préliminaire :**
   - **a.** À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^x \arctan(t)\,\mathrm{d}t$ où $x \in \mathbb{R}$.
   - **b.** En déduire les primitives de la fonction $x \longmapsto \arctan(x)$.
2. En remarquant que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{y}{1+x^2} = y \times \dfrac{1}{1+x^2}$, déterminer alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ pour f solution de $(\star)$.
3. En déduire alors les solutions de $(\star)$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4016

1. **a.** C'est toujours la même astuce : $\arctan(x) = 1 \times \arctan(x)$.
   b. La réponse se déduit de la question précédente directement.
2. On est donc en mesure de connaître $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ puisque dans ce cas il suffit de primitiver l'expression à y constant.
3. On primitive de nouveau à y constant en se servant de la question préliminaire.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4017

Dans tout cet exercice, E désigne un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On rappelle que l'on note $f^2 = f \circ f$.

1. Soit $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Im}(f) & \longrightarrow & E \\ \overrightarrow{x} & \longmapsto & f\left(\overrightarrow{x}\right) \end{array} \right.$ la restriction de f à $\mathrm{Im}(f)$.
   - **a.** Justifier que : $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$.
   - **b.** Montrer que $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}\left(f^2\right)$.
   - **c.** En déduire que : $\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}\left(f^2\right) = \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f))$.
2. Montrer que : $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(f^2\right)\right) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}\left(f^2\right)$.
3. En déduire l'équivalence : $\left(\mathrm{Im}\left(f^2\right) = \mathrm{Im}(f)\right) \Leftrightarrow \left(\mathrm{Ker}\left(f^2\right) = \mathrm{Ker}(f)\right)$.
4. Montrer alors que : $\left(\mathrm{Im}\left(f^2\right) = \mathrm{Im}(f)\right) \Leftrightarrow (E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f))$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4017

1. **a.** Réciter sa définition d'un noyau apporte directement la solution.
   b. Revenir à la définition de l'image d'une application et raisonner par double inclusion.
   c. On applique le théorème du rang à g...
2. Appliquer le théorème du rang à f et à f^2.
3. Justifier dans un premier temps que l'on a toujours $\mathrm{Im}\left(f^2\right) \subset \mathrm{Im}(f)$ et que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$.

L'égalité en termes d'ensembles proviendra de l'égalité des dimensions.

4. On effectue un raisonnement par double implication en revenant notamment à la définition d'une somme directe.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 1216

L'objet de ce problème consiste en l'étude d'endomorphismes u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie qui satisfont la propriété suivante :

$$(\star) : \quad \text{il existe } p \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } u^{p-1} \neq 0 \text{ et } u^p = 0$$

Partie A - Un premier exemple

On considère l'application Δ définie par :

$$\Delta : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_1[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$$

où $\mathbb{R}_1[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 1.

1. Rappelez la dimension de $\mathbb{R}_1[X]$ et en donner une base. On ne demande pas de justifier.

2. Vérifier que Δ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$.

3. Montrer que Δ vérifie la propriété $(\star)$ et préciser la valeur de l'entier p correspondant.

Partie B - Étude pour $\dim E = 3$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à 3, et soit u endomorphisme de E tel que $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$.
On se propose ici de déterminer le rang de l'endomorphisme u, à savoir la dimension de $\operatorname{Im} f$.
Dans toute la suite de cette partie, a désignera un élément de E tel que $u^2(a) \neq 0$. On pourra remarquer qu'un tel a existe bien. . . .

1. Montrer que la famille $\big(a, u(a), u^2(a)\big)$ est libre dans E.

2. En déduire une base de E.

3. Montrer alors que $\big(u(a), u^2(a)\big)$ est une famille libre d'éléments de $\operatorname{Im} u$.

4. Pourquoi $\operatorname{rg} u \geq 2$?

5. Montrer que u n'est pas injective.

6. En déduire le rang de u.

Partie C - Noyaux itérés et ordre de nilpotence

On se place dans le cas où E est un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.
Soit u un endomorphisme qui vérifie la propriété $(\star)$, à savoir tel qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^{p-1} \neq 0$ et $u^p = 0$.
L'objet de cette partie est d'établir que l'on a $u^n = 0$.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Ker}\left(u^k\right) \subset \operatorname{Ker}\left(u^{k+1}\right)$.

2. Montrer que si $\operatorname{Ker} u = \{0\}$, alors pour tout entier $k \geq 1$, on a $\operatorname{Ker} u^{k+1} = \{0\}$.

3. Quelle est la dimension maximale pour $\operatorname{Ker} u^k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$? Justifier.

4. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général α_n est défini pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $\alpha_n = \dim\left(\operatorname{Ker} u^k\right)$, est constante à partir d'un certain rang p_0.

5. Justifier que $p_0 \leq n$.

6. En déduire que $u^n = 0$.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1216

Partie 1 : 1. C'est du cours.

2. RAS

3. Quand on dérive suffisament un polynôme, on retombe sur le polynôme nul. . .

Partie B : 1. On travaille à partir de la définition d'une famille libre. On composera plusieurs fois par u pour obtenir la nullité des coefficients de la combinaison linéaire.

2. On utilise les théorèmes de la dimension finie qui caractérise les bases parmi les familles libres.
3. On reprend le raisonnement de la première question.
4. Il suffit d'interpréter le résultat de la question précédente.
5. On raisonne par l'absurde en remarquant que si on compose u plusieurs fois on perd le caractère injectif.
6. On connaît un minorant du rang de u et de la dimension de son noyau et la dimension de E.

Partie C : **1.** On prend $\overrightarrow{x}$ dans $\mathrm{Ker}\,\left(u^k\right)$ et on montre que $u^{k+1}\left(\overrightarrow{u}\right)=\overrightarrow{0}$.

2. La composée d'injection est une injection...
3. Ne pas oublier qu'il s'agit d'un sous-espace de E.
4. Une suite croissante d'entier majorée est constante à partir d'un certain rang.
5. On connaît la dimension maximale des sous-espaces de E.
6. Raisonner par l'absurde.