À noter & À garder en tête

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout.
Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

Exercice| [3618] | 1| Développements limités

Montrer que : $$\frac{1}{x\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{12}-\frac{x^2}{720}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).$$

Pistes de réflexion

- Il faut partir d'un $DL_n(0)$ de $x\longmapsto \mathrm{e}^{x}$...
- en partant du bon ordre !

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [2194] | 2| Développement limité

Soit f la fonction définie par :

$$f:\left|\begin{array}{ccc}\left]0;\frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \frac{1}{x}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)\end{array}\right.$$

On se propose dans cet exercice d'étudier le comportement de f au voisinage de 0.

(1). Obtention d'un développement limité en 0 de f :

(a). Former le développement limité à l'ordre 6 en 0 de la fonction $x\longmapsto\sin(x)$.

(b). En déduire le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction $x\longmapsto\frac{\sin(x)}{x}$.

(c). Montrer alors que : $$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)=-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{180}x^4+\underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right).$$

(d). En déduire le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction f.

(2). Comportement de f en 0 :

À l'aide du développement limité de f obtenu précédemment :

(a). Déterminer la limite lorsque en 0^+ de f et en déduire que f est prolongeable par continuité en 0. Préciser alors la valeur de $f(0)$.

(b). Donner une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

(c). Étudier la position de la courbe représentative de f par rapport à $\mathcal{T}$ au point d'abscisse 0.

Pistes de réflexion

(1).(a). Former le développement limité d'une fonction trigonométrique ;

(b). Obtention d'un développement limité par multiplication par une puissance de x ;

(c). Obtention d'un développement limité par composition ;

(d). Obtention d'un développement limité par multiplication par une puissance de x ;

(2).(a). Montrer d'une fonction est prolongeable par continuité ;

(b). Obtenir l'équation réduite de la tangente en un point à partir d'un développement limité ;

(c). Étudier la position d'une courbe par rapport à sa tangente en un point à l'aide d'un développement limité.