À noter & À garder en tête

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout.
Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

Exercice| [1224] | 1| Puissance de matrices

Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A + N$.

(1). Pour quelles valeurs de a, la matrice B est-elle inversible ? Calculer alors B^{-1} pour ces valeurs de a.

(2). Vérifier que $AN = NA$ et $N^3 = (0)$.

(3). Montrer par récurrence sur l'entier p que : $\forall p \in \mathbb{N},\ A^p = a^p \mathrm{I}_3$.

(4). Exprimer B^n pour tout entier $n \geq 2$, en fonction de A, N et I_3.

Pistes de réflexion

(1). Écrire explicitement B et reconnaître le sous-ensemble de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ auquel elle appartient apportera sûrement une première partie de la réponse.

(2). On effectue simplement les produits matriciels demandés.

(3). On se souviendra qu'un raisonnement par récurrence présente plusieurs étapes qu'il convient de respecter et d'expliciter correctement.

(4). L'utilisation de la formule du binôme s'impose vu ce que l'on a vérifié dans les questions précédentes.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [2195] | 2| Matrices inversibles et puissances de matrices

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(1). Calculer M^2 puis $M^2 + M - 2\mathrm{I}_3$.

(2). En déduire que M est inversible et calculer M^{-1}.

(3). Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

(4). On pose $Q = P^{-1}MP$.

- **(a).** Montrer par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PQ^nP^{-1}$.
- **(b).** Calculer Q, Q^2, Q^3 et Q^4.
- **(c).** Conjecturer une expression de Q^n où $n \in \mathbb{N}$.
  Justifier votre réponse par récurrence.
- **(d).** En déduire M^n pour $n \in \mathbb{N}$ que l'on explicitera.

Pistes de réflexion

(1). On effectue le calcul de M^2 puis la somme demandée, et il faut espérer pour la suite trouver la matrice nulle.

(2). On exploitera la relation de la question précédente de sorte à écrire $M \times N = \mathrm{I}_3$ où N est une matrice à déterminer, ce qui assurera le caractère inversible de M, et que $M^{-1} = N$.

(3). On recherchera l'inverse de la matrice P par échelonnement de la matrice augmentée $(P|\mathrm{I}_3)$.

(4). On se souviendra qu'un raisonnement par récurrence présente plusieurs étapes qu'il convient de respecter et d'expliciter correctement. Pour l'hérédité, on pensera à exprimer proprement M en fonction de P, Q et P^{-1}.

(5).(a). On effectue les calculs demandés, en essayant d'être attentif aux résultats obtenus pour la question suivante.

(b). Une fois l'expression de Q^n conjecturée, il restera à la démontrer par récurrence en étant comme précédemment très précautionneux...

(c). On se souviendra qu'un raisonnement par récurrence présente plusieurs étapes qu'il convient de respecter et d'expliciter correctement.

(d). On exploite les résultats précédents en effectuant le produit matriciel donnant M^n en fonction de n.